

УДК 681.2.08

П. П. Завьялов, А. А. Шатов

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ ПОВОРОТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАКЕТНЫХ КОМПЛЕКСОВ ПРИ НАЗЕМНЫХ ИСПЫТАНИЯХ

*Рассмотрена задача определения углового ускорения поворотных элементов ракетных комплексов при наземных испытаниях, которая при составе измерителей, обеспечивающем достаточно простое исполнение системы измерений, является плохо обусловленной. Приведена методика ее решения.*

*Розглянуто задачу визначення кутового прискорення поворотних елементів ракетних комплексів під час наземних випробувань, яка при складі вимірників, що забезпечує досить просте виконання системи вимірювань, є погано обумовленою. Наведено методику її розв'язання.*

*The paper considers the task of determination of angular acceleration of rotary elements of rocket systems during ground tests, which, at the composition of meters ensuring simple enough measurement system embodiment, is poorly conditioned. The technique of its solution is presented.*

### Введение

При создании ракет и ракетных комплексов проводится отработка их отдельных элементов, таких как, например, стрела установщика ракеты или кантователь спутникового отсека ракеты. Она включает в себя поворот указанных объектов от горизонтального, начального, положения до вертикального. Угол положения объекта  $\alpha$  изменяется при этом от 0 до 90°. Задачу контроля нагрузок на механизмы поворота этих объектов необходимо решать при всех значениях угла.

При известных инерционных характеристиках объекта задача сводится к измерению углового ускорения объекта  $\varepsilon$  или определению его путем пересчета измерений других параметров. Максимально допустимое значение углового ускорения, контролируемое в процессе поворота, составляет обычно 2,5–5,0 %/с<sup>2</sup>. Допустимая погрешность контроля этой величины  $\Delta\varepsilon$  регламентируется в технической документации на объект, имея значение 0,25–0,5 %/с<sup>2</sup>, на метрологический порядок меньше самой контролируемой величины.

В первом случае (измерений) в качестве измерителя могут быть использованы различные датчики углового ускорения, например датчик фирмы Colombia Models – SR-220NP. Однако решение задачи таким способом имеет следующие недостатки:

– погрешность датчиков углового ускорения превышает, как правило, указанную допустимую погрешность;

– помимо контроля углового ускорения необходимо в отдельных случаях знать текущее угловое положение объекта, которое определяется путем интегрирования углового ускорения; точность получаемых результатов оказывается в этом случае недостаточной;

– использование измерителя углового положения дополнительно с датчиком углового ускорения приводит к затруднениям в основном конструктивного характера.

Конечное положение объекта по завершении поворота фиксируется конечным выключателем, поэтому контроль текущего углового положения носит факультативный характер. Допустимая погрешность контроля принимается обычно не менее 1°.

Во втором случае (пересчета) применение трехкомпонентного измерителя линейного ускорения  $a$  позволяет определять одновременно и угловое ускорение, и угловое положение. В качестве такого измерителя предлагается использовать датчик фирмы Spectrum Sensors&Controls – 35203B-R001, который имеет диапазон измерений 10 м/с<sup>2</sup> и предельную погрешность 0,2% диапазона измерений  $\Delta a = 0,02$  м/с<sup>2</sup> при условии учета влияния на него температуры окружающей среды.

Схема установки датчика в плоскости разворота объекта и расположения векторов линейных ускорений, измеряемых датчиком, называемая схемой измерений, приведена на рис. 1. На схеме указаны следующие обозначения:

–  $OXYZ$  – система координат, связанная с объектом (в начальном положении объекта ось  $OX$  расположена в горизонтальной плоскости, ось  $OY$  направлена вертикально, ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости поворота, дополняет систему до правой);

–  $OX_0Y_0Z_0$  – неподвижная система координат (связанная система координат на начальный момент разворота объекта);

–  $OX_dY_dZ_d$  – система координат датчика (измерительные оси датчика  $OX_d$ ,  $OY_d$ ,  $OZ_d$  направлены параллельно осям связанной системы координат);

–  $\alpha$  – угол между осями  $OX_0$  и  $OX$ , задающий положения объекта в процессе его поворота;

–  $r$  – расстояние от датчика до оси поворота объекта;

–  $\tau$  – вектор тангенциального линейного ускорения точки установки датчика; абсолютная величина вектора  $\tau = |\tau| = \varepsilon \cdot r$ ;

–  $w$  – вектор, обратный вектору гравитационного ускорения.

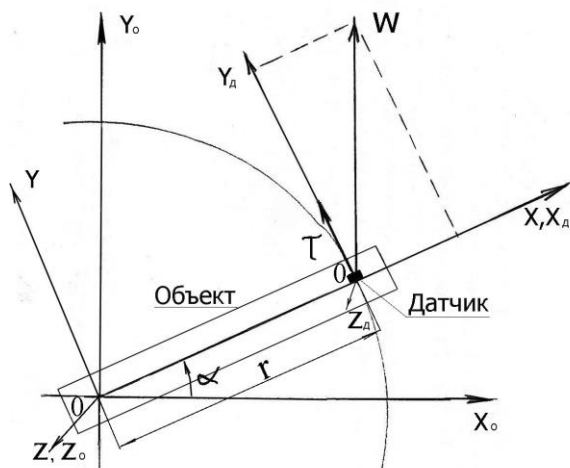


Рис. 1. Схема измерений

По конструктивным соображениям датчик устанавливают на объекте в наиболее простом варианте – в горизонтальной плоскости системы координат, связанной с объектом, с вертикальным положением оси  $OY_d$  в исходном положении объекта. До-

статочно большие размеры объекта позволяют установить датчик на расстоянии  $r$  порядка 25 м от оси поворота объекта.

### Постановка задачи

Таким образом, задача заключается в определении параметров углового положения объекта по измерениям датчика линейных ускорений. Определяемыми параметрами являются: угол поворота объекта  $\alpha$ , угловое ускорение поворота  $\varepsilon$ . Измеряемыми параметрами  $a_x$ ,  $a_y$  являются показания датчика по осям  $OX_d$ ,  $OY_d$ . Измерение  $a_z$  по оси  $OZ_d$  используется только для контроля правильности установки датчика по условию  $a_z \approx 0$  с заданной погрешностью контроля.

Уравнения измерений, выражающие зависимость измеряемых параметров от параметров, подлежащих определению, имеют в соответствии с рис. 1 следующий вид:

$$a_x = g \cdot \sin \alpha; \quad (1)$$

$$a_y = g \cdot \cos \alpha + \varepsilon r, \text{ где } g = |w| = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Постановку задачи в виде (1) будем называть исходной.

Решение задачи заключается в выражении искомых параметров  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  через измеряемые параметры  $a_x$ ,  $a_y$  путем обращения уравнений (1):

$$\alpha = \arcsin(a_x/g); \quad (2)$$

$$\varepsilon = (a_y - (g^2 - a_x^2)^{1/2})/r \text{ при условии } g^2 - a_x^2 \geq 0. \quad (3)$$

Однако полученное решение является удовлетворительным не на всем участке поворота. Чтобы убедиться в этом, достаточно выразить вариации определяемых параметров через вариации измеряемых:

$$d\alpha = (g \cdot \cos \alpha)^{-1} \cdot da_x; \quad (4)$$

$$d\varepsilon = (da_y + tg\alpha \cdot da_x)/r.$$

Из этих выражений следует, что при  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  (объект принимает вертикальное положение) малые ошибки измерений приводят к недопустимо большим погрешностям в определяемых параметрах. Такие задачи, чувствительные к малым ошибкам входных данных, называются плохо обусловленными [1]. В этом случае решение

задачи требует дополнительных мер по улучшению ее обусловленности до приемлемого уровня, при котором погрешности определения искомых параметров меньше допустимой погрешности их контроля.

Улучшение обусловленности таких задач в отдельных случаях возможно путем модификации измерительного комплекса, в частности путем добавления измерителей. При использовании двух датчиков, когда второй датчик устанавливают аналогично первому, но на расстоянии  $\rho$  от оси поворота, уравнения измерений и вариаций параметров представляются с использованием соотношения (1) и рис. 1 в виде

$$\begin{aligned} (a_{x1} + a_{x2})/2 &= g \cdot \sin\alpha, \text{ при } \alpha < 45^\circ; \\ \rho \cdot a_{y1} - r \cdot a_{y2} &= g \cdot (\rho - r) \cdot \cos\alpha, \text{ при } \alpha > 45^\circ; \\ a_{y1} - a_{y2} &= \varepsilon \cdot (r - \rho); \\ d\alpha &= (da_{x1} + da_{x2}) / (2g \cos\alpha), \alpha < 45^\circ; \\ d\alpha &= (\rho \cdot da_{y1} - r \cdot da_{y2}) / (g(r - \rho) \sin\alpha), \alpha > 45^\circ; \\ d\varepsilon &= (da_{y1} - da_{y2}) / (r - \rho), \end{aligned} \quad (5)$$

где индексы 1 и 2 обозначают соответственно первый и второй датчики.

Из соотношений для вариаций  $d\alpha$  и  $d\varepsilon$  видно, что проблемы плохой обусловленности в данном случае не возникает. Однако имеются недостатки. Во-первых, второй датчик в целях обеспечения требуемой точности определяемых параметров нужно устанавливать ближе к оси поворота. А это не всегда конструктивно возможно. Во-вторых, увеличивается стоимость системы измерений, поскольку существенную ее часть составляет именно стоимость датчика. Поэтому этот метод может оказаться неприемлемым.

### Моделирование измерений

Разработку методики решения задачи и проверку предложений по улучшению обусловленности задачи целесообразно провести с использованием моделированной информации. Для этого вначале были получены номинальные значения измеряемых параметров  $a_{nx}$ ,  $a_{ny}$  посредством соотношений (1) по результатам моделирования процесса поворота объекта по времени:

$$d\alpha/dt = \omega; \quad (6)$$

$$d\omega/dt = \varepsilon,$$

где  $\omega$  – угловая скорость поворота;  $t$  – текущее время поворота;  $\varepsilon = 0,4584 \text{ } ^\circ/\text{с}^2$  при  $\alpha < 9^\circ$ ;  $\varepsilon = 0,2 \cdot (\alpha - 9)/3 \text{ } ^\circ/\text{с}^2$  при  $9^\circ < \alpha < 12^\circ$  (увеличение угловой скорости поворота до требуемой);  $\varepsilon = 0$  при  $12^\circ < \alpha < 77^\circ$  (поворот с постоянной угловой скоростью);  $\varepsilon = -0,4584 \cdot (\alpha - 77)/3 \text{ } ^\circ/\text{с}^2$  при  $77^\circ < \alpha < 80^\circ$ ;  $\varepsilon = -0,2 \text{ } ^\circ/\text{с}^2$  при  $80^\circ < \alpha < 90^\circ$  (уменьшение угловой скорости до 0 к концу поворота).

Текущие значения номинальных определяемых параметров  $\alpha_n$ ,  $\varepsilon_n$  приведены на графиках рис. 2. Там же приведена вариация  $d\varepsilon$  согласно (4) при ошибках измерений  $da_x = da_y = 0,02 \text{ м/с}^2$ , равных  $\Delta a$ , как степень обусловленности задачи в исходной ее постановке.

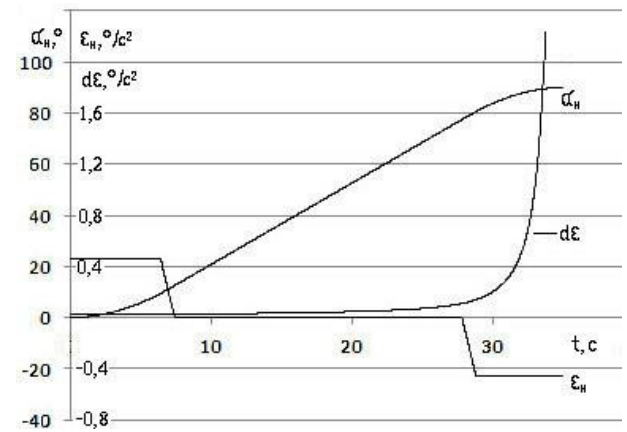


Рис. 2. Графики номинальных значений определяемых параметров при решении исходной задачи

Моделированные измерения получаются при добавлении ошибок к номинальным измерениям. При этом необходимо учесть, что ошибки измерений типа «белого шума» усредняются или фильтруются в процессе оценки искомых параметров, что способствует в какой-то мере улучшению обусловленности задачи. Наиболее опасной в этом плане является медленноменяющаяся ошибка измерений. Поэтому моделируемые ошибки задавались постоянными, как граничные значения случайной погрешности реальных измерений, равными по величине предельной погрешности измерителя  $\Delta a$ . Добавление моделируемых ошибок осуществлялось в двух крайних вариантах:

– «+», добавляются  $\delta a_x^+ = +\Delta a$  и  $\delta a_y^+ = +\Delta a$ ;  
 – «-», добавляются  $\delta a_x^- = -\Delta a$  и  $\delta a_y^- = -\Delta a$ .

Полученные моделированием измерения использовали для решения исходной задачи. Искомые параметры углового положения объекта ( $\alpha^+$ ,  $\varepsilon^+$  и  $\alpha^-$ ,  $\varepsilon^-$ ), отвечающие вариантам «+» и «-», находили в этом случае по соотношениям (2).

В качестве меры обусловленности рассматриваемой задачи были приняты предельные погрешности определяемых параметров – разности искомых параметров, полученных по моделированным измерениям, и их номинальных значений. Указанные погрешности  $\delta\alpha^+ = |\alpha^+ - \alpha_n|$ ,  $\delta\varepsilon^+ = |\varepsilon^+ - \varepsilon_n|$  и  $\delta\alpha^- = |\alpha^- - \alpha_n|$ ,  $\delta\varepsilon^- = |\varepsilon^- - \varepsilon_n|$  в сравнении с допустимыми погрешностями контроля параметров  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\varepsilon$  приведены на рис. 3.

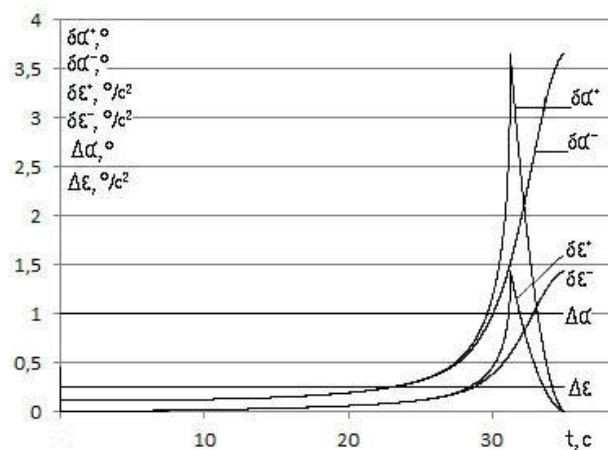


Рис. 3. Графики предельных погрешностей определяемых параметров при решении исходной задачи

Представленные графики иллюстрируют плохую обусловленность задачи в исходной постановке в окрестности  $\alpha = 90^\circ$ . Погрешности определения  $\alpha$  и  $\varepsilon$  при повороте объекта на  $86^\circ$  (29 с) становятся больше допустимых значений, а при дальнейшем увеличении  $\alpha$  устремляются к недопустимо большим величинам. Точнее говоря, параметры  $\alpha$  и  $\varepsilon$  при  $t > 31$  с ( $\alpha > 88^\circ$ ), когда условие (3) не выполняется, вообще не определены, поскольку в этом случае измерения  $a_x$  не используются в расчетах.

### Методика решения задачи

Рассматриваемая задача во многом аналогична так называемым некорректным задачам, которые характеризуются тем, что имеют не одно, а множество решений [2]. Для выбора правильного решения некорректных задач привлекают дополнительную, априорную, информацию. Методы решения таких задач широко применяются в практике вычислений. Проблема решения этих задач и задачи, рассматриваемой в статье, фактически одна и та же – неопределенность получаемых решений. Поэтому для улучшения обусловленности рассматриваемой задачи предлагается воспользоваться методами решения некорректных задач.

Эти методы достаточно разработаны в случае линейной постановки задачи. Поэтому для реализации указанного предложения необходимо перейти к линейной постановке исходной задачи. Для этого система уравнений (1) дополняется соотношением

$$\sin\alpha \cdot \sin\alpha_0 + \cos\alpha \cdot \cos\alpha_0 = \cos(\alpha - \alpha_0)$$

и вместо  $\alpha$  вводятся новые искомые параметры  $s = \sin\alpha$  и  $c = \cos\alpha$ . То есть дополнительное уравнение измерений принимает следующий вид:

$$s_0 \cdot s + c_0 \cdot c = e,$$

где  $e = 1 - (\alpha - \alpha_0)^2 / 2 + O((\alpha - \alpha_0)^2)$ .

Угол  $\alpha_0$  отмечает положение объекта, определенное в предыдущем цикле алгоритма вычислений, выполняемых системой измерения. В качестве  $s_0$  и  $c_0$  используются соответствующие значения из предыдущего цикла вычислений.

Длительность цикла вычислений и угловая скорость поворота, реализуемые на практике, имеют значения порядка 0,01 с и 0,05 рад/с. Это позволяет принять параметр  $e$  в качестве измеряемого, полагая, что  $e = 1$  с пренебрежимо малой погрешностью измерений  $(\alpha - \alpha_0)^2 / 2 \approx 0,125 \cdot 10^{-6}$ .

Уравнения измерений становятся линейными:

$$z = H \cdot x; \tag{7}$$

где  $z = (a_x, a_y, 1)^T$ ;  $x = (s, c, \varepsilon)^T$ ;

$$H = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & r \\ s_o & c_o & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи сводится к обращению матрицы  $H$ :  $x = H^{-1} \cdot z$ .

Задача в постановке (7) по сути не отличается от исходной и потому не становится обусловленной. Причина этого кроется в том, что  $\det(H) = -gr \cdot c_o \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ . Поэтому результаты ее решения по моделированной информации фактически те же самые, что и при исходной постановке (рис. 4). Только графики погрешностей определяемых параметров в окрестности  $\alpha = 90^\circ$ , выражая неопределенность параметров, принимают флуктуационный характер с большим размахом значений параметров вследствие  $\det(H) \approx 0$  и отсутствия условия, аналогичного (3). При этом размах значений на графике ограничен программно в целях соблюдения масштаба, принятого на рис. 3.

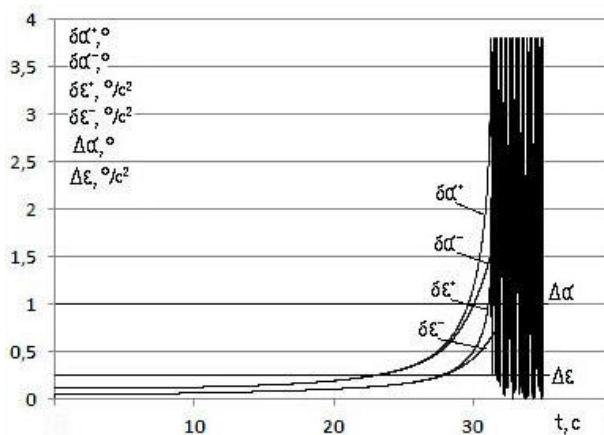


Рис. 4. Графики предельных погрешностей определяемых параметров при решении линеаризованной исходной задачи

Для решения задачи (7) воспользуемся теми из указанных методов, которые основаны на привлечении априорной информации о параметрах как измеряемых, так и определяемых, в дополнение к измерительной информации. В качестве таковой предлагается использовать следующие положения:

1. Искомые значения параметров не должны сильно отличаться от значений, полученных в близлежащей точке траектории в предыдущем цикле вычислений. Другими словами, эти величины могут быть

использованы как измерения с определенным весом.

2. Значение такого веса зависит от стабильности поведения параметра. Наиболее нестабильным из параметров поворота является угловое ускорение  $\epsilon_o$  вследствие его динамичности и возможных случайных возмущений в штатной циклограмме поворота. На участках нестабильности вес измерений должен уменьшаться.

3. Плохая обусловленность задачи при  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  проявляется, судя по соотношениям оценки погрешности (3), при наличии ошибок только в измерениях параметра  $a_x$  (по оси  $OX_d$ ). В целях нейтрализации этих ошибок следует принять значение относительного веса измерений  $a_x$  меньше, чем измерений  $a_y$ .

4. Обусловленность задачи ухудшается до недопустимого уровня пропорционально величине  $\text{tg} \alpha$  (см. параметр  $\delta \epsilon$  на рис. 2). Поэтому указанный вес должен иметь соответствующий закон изменения с увеличением угла поворота.

5. Относительный вес измерения  $e = 1$  следует принимать достаточно большим ввиду его исключительной точности.

Согласно положению 1 количество измеряемых параметров увеличилось до шести:  $z_1 = n_x$ ;  $z_2 = n_y$ ;  $z_3 = 1$ ;  $z_4 = s_o$ ;  $z_5 = c_o$ ;  $z_6 = \epsilon_o$ . Вследствие этого задача становится переопределенной, что позволяет использовать для расчета искомых параметров метод взвешенных наименьших квадратов (МНКв). Тогда учет априорных данных сводится к назначению относительных весов измерений –  $v_i$ ,  $i = 1-6$ . Согласно положениям 2–5 значениями весов принимаются величины соответственно:

$$v_1 = \cos \alpha_o; v_2 = 1; v_3 = 100; v_4 = 1; v_5 = 1; v_6 = 0,5 / (1 + 2|\dot{\epsilon}|)^2,$$

где  $\dot{\epsilon} = (\epsilon - \epsilon_o) / dt$ ,  $dt = 0,01$  с. (8)

С учетом изложенного уравнения измерений принимают следующий вид:

$$z = \underline{H} \cdot x, \quad (9)$$

где  $z = (a_x, a_y, 1, s_o, c_o, \epsilon_o)^T$ ;  $x = (s, c, \epsilon)^T$ ;

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & r \\ s_o & c_o & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Искомые параметры определяются соотношением

$$x = (\underline{H}^T \underline{V} \underline{H})^{-1} \cdot \underline{H}^T \underline{V} \cdot z, \quad (10)$$

где  $\underline{V}$  – диагональная матрица с весами  $v_{1-6}$  на диагонали.

Угол поворота объекта вычисляется по формуле  $\alpha = \arcsin(s)$ .

Результаты решения задачи методом МНКв при таком же моделировании измеряемых параметров, как и в исходной задаче, представлены на рис. 5 в виде графиков погрешностей определяемых параметров –  $\delta\alpha^+ = |\alpha^+ - \alpha_{н}|$ ,  $\delta\epsilon^+ = |\epsilon^+ - \epsilon_{н}|$  и  $\delta\alpha^- = |\alpha^- - \alpha_{н}|$ ,  $\delta\epsilon^- = |\epsilon^- - \epsilon_{н}|$  – в сравнении с их допустимыми погрешностями контроля  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\epsilon$ .

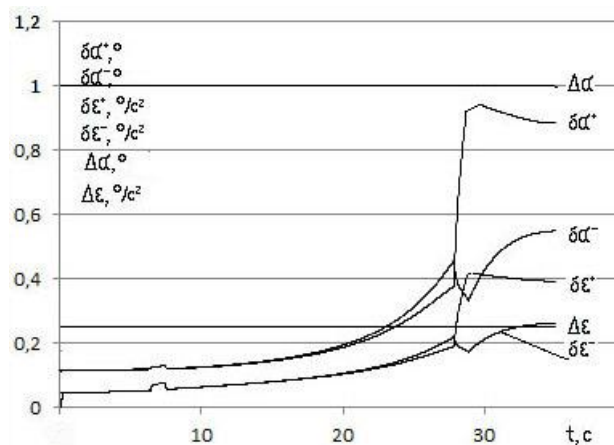


Рис. 5. Графики предельных погрешностей определяемых параметров при решении линеаризованной задачи методом МНКв

Погрешности определяемых параметров в основном не превышают допустимых значений, за исключением погрешности углового ускорения  $\delta\epsilon^+$  на участке  $t > 29$  с ( $\alpha > 81^\circ$ ). Превышение незначительное. То есть искомые параметры являются определенными, и задача при решении методом МНКв становится в достаточной мере обусловленной. Тем не менее вопрос о доведении точности до требуемых значений остается.

Для решения вопроса необходимо отметить, что плохая обусловленность задачи в

исходной постановке проявляется только при  $\alpha \approx 90^\circ$ . Другими словами, ось  $OX_d$  датчика не должна достигать вертикального положения по завершении поворота объекта. Для этого предлагается установить датчик на объекте смещенным по дуге поворота объекта вниз на угол  $\gamma$  так, чтобы ось  $OY_d$  по-прежнему оставалась касательной к дуге поворота, как это указано на рис. 6.

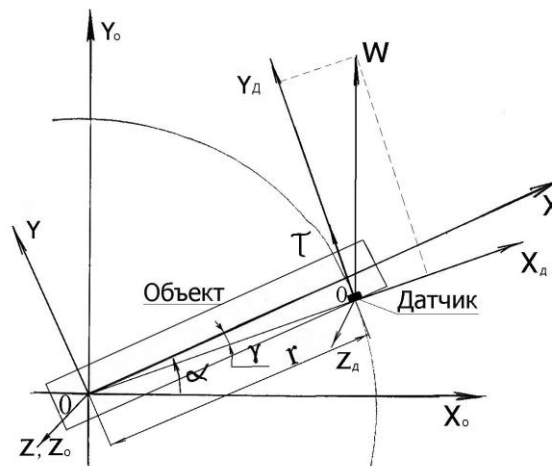


Рис. 6. Схема установки датчика на объекте со смещением датчика

Выбор значения углового смещения датчика  $\gamma$  в конкретной ситуации обусловлен двумя факторами. С одной стороны, из графиков рис. 5 следует, что с увеличением угла  $\gamma$  погрешности определяемых параметров уменьшаются. С другой стороны, значение углового смещения чаще всего ограничено конструкцией объектов в пределах  $20^\circ$ . Значение угла принимается таким, чтобы он был достаточно малым, а предельные погрешности определяемых параметров не превышали своих допустимых границ  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\epsilon$ .

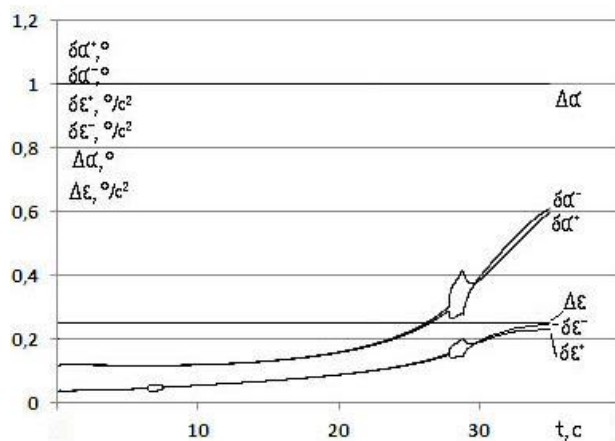


Рис. 7. Графики предельных погрешностей параметров, определяемых методом МНКв, при угловом смещении датчика на объекте на  $10^\circ$

В рассматриваемом случае, судя по поведению погрешностей определяемых параметров (рис. 5) в районе  $t \approx 29$  с ( $\alpha \approx 81^\circ$ ), указанную величину можно принять равной  $10^\circ$ . Проверка по моделированным измерениям, полученным при  $\gamma = 10^\circ$ , результаты которой приведены на рис. 7, показывает правильность этого выбора.

### Выводы

Рассмотренная задача определения углового ускорения поворотных элементов ракетных комплексов при наземных испытаниях по измерениям датчика линейных ускорений в ее исходном виде (1), (2) является плохо обусловленной. Для ее решения требуется улучшение обусловленности до приемлемого уровня. Решение задачи осуществляется путем использования метода взвешенных наименьших квадратов (9), (10) с весами измерений, назначенными в соответствии с дополнительной априорной информацией о параметрах как измеряемых, так и определяемых. При этом датчик при установке на указанных объектах должен быть смещен по дуге поворота объекта вниз так, чтобы ось  $OY_d$  по-прежнему оставалась касательной к дуге поворота, как это указано на рис. 6.

Для рассмотренной схемы измерений и установки датчика на объекте значения весов измерений (8) и угла смещения датчика, принятые по результатам моделирования, обеспечили определение углового ускорения и угла поворота объекта с погрешностями, не превышающими допустимую погрешность контроля этих параметров. Эти значения рекомендуются к применению.

Для объектов, имеющих схему измерений и установки датчика, отличную от рассмотренной, рекомендованные веса измерений и угол смещения датчика должны уточняться по результатам предложенного моделирования для конкретной ситуации.

### Список использованной литературы

1. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1994. – 554 с.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.

Статья поступила 08.11.2017