УДК 51(076.2)

И. Ф. Павлыш

РЕШЕНИЕ «НЕРЕШАЕМЫХ» ЗАДАЧ

Представлены в полном объеме решения задач, сформулированных в VIII столетии до нашей эры: задача фараона (колодец Лотоса), удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. У каждой из этих задач своя трехтысячелетняя история попыток решения. В настоящее время эти задачи остаются в статусе нерешаемых.

Подано у повному обсязі розв’язання задач, сформульованих у VIII столітті до нашої ери: задача фараона (криниця Лотоса), подвоєння куба, трисекція кута, квадратура кола. У кожної з цих задач своя трьохтисячолітня історія намагань розв’язання. Нині ці задачі залишаються в статусі нерозв’язуваних.

Solutions of problems, formulated in VIII century B.C, are presented herein in full: Pharaoh problem (Lotus well), duplication of cube, trisection of angle, quadrature of circle. Each of the above problems has its own three millennia history of solution attempts. Currently these problems have the status of unsolved.

Задача фараона

Задача фараона, или колодец Лотоса, – одна из задач занимательной математики. Задача была сформулирована в VIII в. до н. э. Эта математическая задача – прародитель «неразрешимых» задач, таких как трисекция угла, удвоение куба (задача дельфийского оракула) и квадратура круга.

Условие задачи

В круглый колодец налита вода на одну единицу высоты. Две разновеликие тростинки длиной 2 и 3 единицы соответственно одними концами упираются в дно колодца, а другими – опираются на его стены. Тростинки пересекаются на уровне налитой в колодец воды. Какова ширина (диаметр) колодца?

Анализ условия задачи

Составитель этой задачи продемонстрировал свои знания, а значит, и знания, доступные определенным слоям того далекого времени, интересующимся гидравликой, архитектурой, геометрией, математикой и механикой.

Для решения задачи необходимо понять: зачем колодец залит водой и что из себя представляют колодец и тростинки.

На погруженные в колодец, залитый водой, тростинки действуют сила тяжести, направленная вниз, и выталкивающая (архимедова) сила, направленная вверх. В связи с разностью удельных весов воды и деревянных тростинок подъемная сила пытается вытолкнуть тростинки, а сила тяжести удерживает их на определенной глубине погружения, где эти силы уравновешены. И если выталкивающая сила больше веса тростинки, то тростинка установится так, что ее ось пересечется с осью колодца, а нижний конец не будет упираться в дно и зависнет, касаясь стенок колодца на высоте, где сила выталкивания уравновесится с весом. Исходя из этого, автор задачи записал, что тростинки стоят на дне, а то, что нижние их концы прижаты к стенкам колодца, должен знать сам будущий жрец.

Моменты сил веса и выталкивания стремятся развернуть тростинки в наибольшее горизонтальное положение и прижимают их концы к стенкам колодца. Указанные силы и их моменты обеспечивают самоустановку тростинок в положение, при котором точка касания тростинок лежит в плоскости, проходящей через ось колодца. В этом случае под воздействием силы тяжести и выталкивания тростинки занимают наибольшее горизонтальное положение.

Диаметры тростинок в расчете не учитываются. Используются прямые, проходящие через точку касания тростинок (между собой), параллельно осям тростинок длиной $2L$ и $3L$. При этом прямые находятся в плоскости, проходящей через ось колодца (рис. 1).

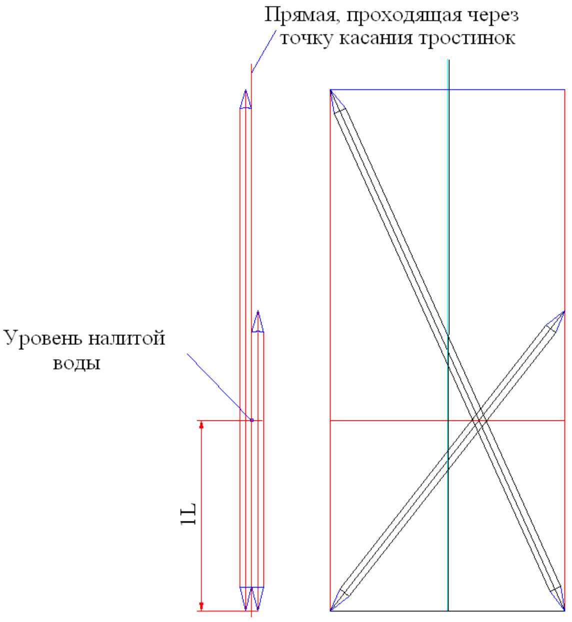


Рис. 1

Учитывая вышеизложенное, в последующих расчетах вместо тростинок будем использовать прямые, проходящие через точку касания тростинок и установленные в колодце с учетом влияния сил, действующих на реальные тростинки, если бы действительно они были установлены.

В быту, вероятно, были деревянные тростинки диаметром около 1 дюйма, на концах заточенные «под карандаш» $\approx 15^{\circ}$. Поместив тростинки в воду, автор задачи значительно сократил ее условия и проверил знания будущего жреца.

Для вычисления ширины (диаметра) колодца из условия задачи используем равносторонний треугольник высотой $1L$ (см. обоснование в главе «Решение задачи фараона») и примем:

$2L$, $3L$ – длины тростинок;

L – единица длины.

В период египетской цивилизации единицей длины L был один шаг, равный 0,8144 м. В то время не знали одной сорокамиллионной части Парижского меридиана 1 м, но использовалось десятичное исчисление.

Вычисление коэффициентов отношения катетов замечательного треугольника со сторонами $3L$, $3Lx$, $6L$

Египетской цивилизации были известны два замечательных прямоугольных треугольника: со сторонами $3L$, $4L$, $5L$, где $3L$ и $4L$ – катеты, а $5L$ – гипотенуза, и со сторонами $3L$, $3Lx$ и $6L$, где $3L$ и $3Lx$ – катеты, а $6L$ – гипотенуза.

Знания об этих треугольниках были достаточны, чтобы вычислить коэффициент x, который в настоящее время мы называем квадратным корнем из числа 3 (обозначается $\sqrt{3}$). С учетом возможностей арифметики и геометрии того времени рассмотрим вычисление коэффициента x. Разделим длины сторон обоих замечательных треугольников на 3 и получим $1L$; $\frac{4}{3}L$; $\frac{5}{3}L$ и $1L$; $x\,L$; $2L$. В дальнейших вычислениях коэффициента x исключим L. Совместим эти треугольники и сравним площади (рис. 2).

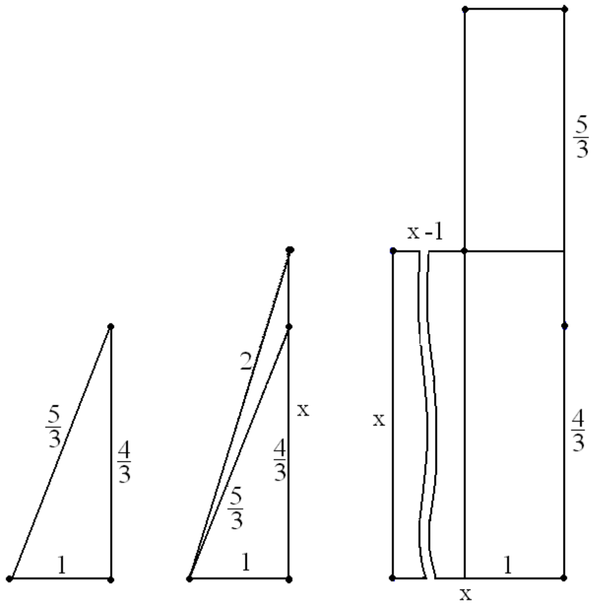


Рис. 2

Рассмотрим площади:

– квадрата со стороной x, площадь которого равна $x \cdot x = x^2$;

– параллелограмма высотой $\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right)$ и шириной 1, площадь которого равна $1 \cdot \left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right)$.

Площадь квадрата равна x^2, а параллелограмма – 3, отсюда разность площадей равна $x^2 - 3$.

Рассмотрим площади:

– параллелограмма высотой x и шириной $(x-1)$, площадь его равна $(x-1)\cdot x$;

– параллелограмма высотой $\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}-x\right)$ и шириной 1, площадь его равна 3–x, отсюда разность площадей $(x^2-x)-(3-x) = x^2 - 3$. Используем аксиому: если от двух площадей отнять равные площади и при этом оставшиеся площади равны, значит, эти две площади равны. А это возможно, только когда x^2=3. Отсюда $x=\sqrt{3}$.

Вычислить коэффициент x не представляет никакой сложности.

Для удобства в дальнейшем вместо x будем использовать $\sqrt{3}$. Возможно, применение свойств треугольника $1L$, $1Lx$, $2L$ поможет нам решить задачу. Из анализа рис. 2 следует, что если через любою точку катета $1Lx$ (или его продолжения) провести прямую параллельно гипотенузе (размером 2), то образуется прямоугольный треугольник, подобный треугольнику со сторонами $1L$, $1Lx$, $2L$, т. е. замечательный прямоугольный треугольник.

Решение задачи фараона

В условиях задачи записано, что в колодец залита вода на 1 единицу длины (далее – ед. дл.) Практически залить на 1 ед. дл. непросто, а главное, зачем именно на 1 ед. дл.? Вода никак не влияет на высоту пересечения тростинок, она обеспечивает самоустановку тростинок и должна быть налита на высоту, исключающую отрыв тростинок от дна колодца, но это оговорено в условиях задачи. В связи с вышеизложенным и учитывая, что в то время были известны равносторонние треугольники и их составляющие два замечательных прямоугольных треугольника, высоту налитой воды на 1 ед. необходимо воспринимать как подсказку от автора, что для решения задачи необходимо использовать равносторонний треугольник с высотой, равной 1 ед. дл., состоящий из двух замечательных прямоугольных треугольников, у которых больший катет равен 1 ед. дл., меньший – $\frac{1L}{\sqrt{3}}$, а гипотенуза – $\frac{2L}{\sqrt{3}}$.

Воспользуемся подсказкой автора. Для решения задачи используем равносторонний треугольник с высотой $1L$. Для вычисления ширины (диаметра) колодца из условия задачи примем:

$1L$ – высота равностороннего треугольника (состоящего из двух замечательных треугольников);

$2L$, $3L$ – длины тростинок;

L – единица длины.

Для решения задачи построим рис. 3.

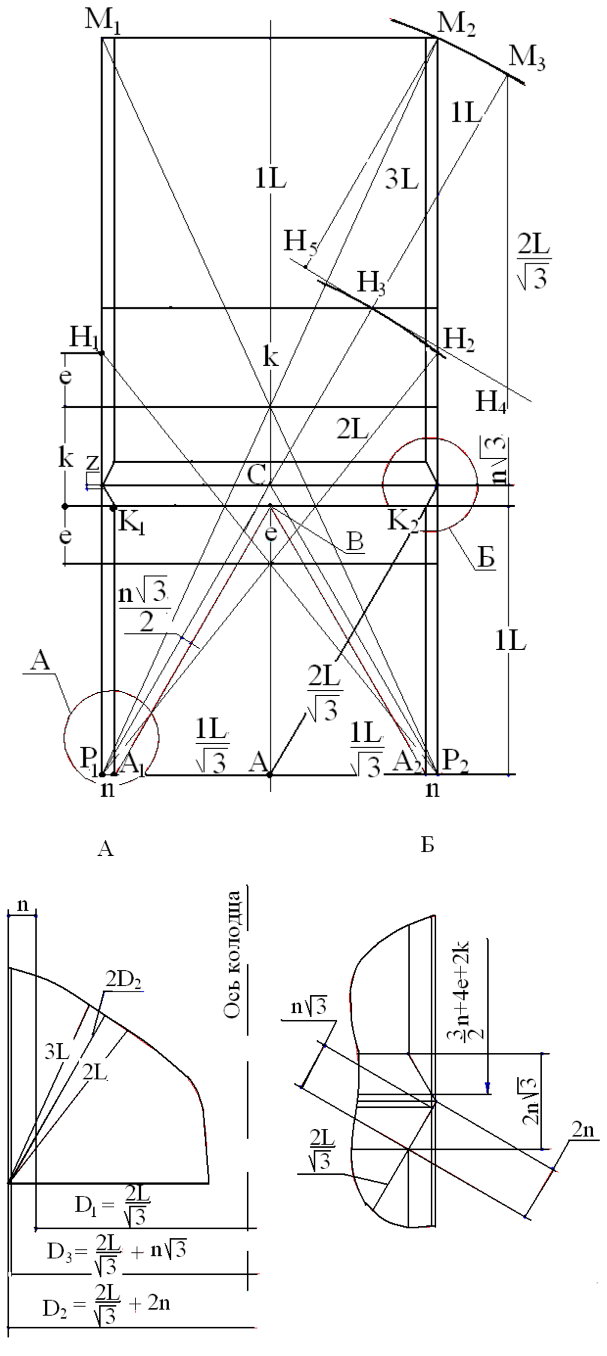


Рис. 3

Построим ось колодца и проведем две перпендикулярные к ней прямые на расстоянии 1 ед. дл. Точки пересечения с осью колодца обозначим А, В соответственно. Используя отрезок АВ в качестве высоты, построим равносторонний треугольник A_1BA_2, который состоит из двух замечательных треугольников. Через точки A_1, A_2 проведем параллельно оси колодца прямые, а точки пересечения с прямой, перпендикулярной оси колодца и проходящей через точку В, обозначим K_1, K_2. Образовались замечательные равные треугольники A_1K_1B и A_2K_2B. Условно переместим параллельно оси колодца треугольники A_1K_1B и A_2CB на отрезок n от оси колодца. При этом точки A_1, A_2 на смещенных треугольниках обозначим P_1, P_2. Через точки P_1, P_2 параллельно отрезкам A_1B и A_2B проведем прямые, а точку пересечения на оси колодца обозначим С. Из точки P_1 радиусом P_1M_2 сделаем засечку на продолжении отрезка P_1C, а точку пересечения обозначим M_3. Образовался равносторонний треугольник со сторонами $P_1C=CP_2=P_2P_1=D_2$ и высотой $1+n\sqrt{3}$, отсюда $D_2=D_1+2n$. Через точки P_1, P_2 параллельно оси колодца проведем прямые и примем их за стенки колодца. Из точек P_1, P_2 радиусами $3L$ и $2L$ на противоположных стенках колодца сделаем засечки, точки пересечения обозначим H_1, M_1 и H_2, M_2. Через пары точек P_1 и M_2, P_1 и H_2, P_2 и H_1, P_2 и M_1 проведем прямые, которые пересекутся с осью колодца в одной точке. Длину отрезка от точки пересечения тростинок $2L$ (на оси колодца) до точки В обозначим e. Длину отрезка от точки пересечения тростинок $3L$ (на оси колодца) до точки В обозначим k.

Из точки P_1 радиусом P_1H_2 сделаем засечку на прямой P_1M_3, а точку пересечения обозначим H_3. Через точку H_3 перпендикулярно прямой P_1M_3 построим прямую. Из точки M_3 параллельно P_2M_2 проведем прямую, а точку пересечения с перпендикуляром к отрезку P_1M_3 через точку H_3 обозначим H_4. Через точку M_2 параллельно P_1M_3 проведем прямую, а точку ее пересечения с перпендикуляром через точку H_3 к прямой P_1M_3 обозначим H_5. Из рис. 3 очевидно, что треугольник $M_2H_5H_2$ равен треугольнику $M_3H_3H_4$. Это два замечательных прямоугольных треугольника, у которых большие катеты равны $1L$, а значит, равны и гипотенузы. Тогда $M_2H_2=M_3H_4=\frac{2L}{\sqrt{3}}$, а значит, $k+e=\frac{1}{2}\cdot\frac{2L}{\sqrt{3}}$.

Из рис. 3 запишем следующие равенства:

$M_2H_2+e=1L+k$;

$M_2H_2=2(e+k)$; $\quad \frac{k+e}{2}-e=n\sqrt{3}$.

Так как M_2H_2 равен $\frac{2L}{\sqrt{3}}$, запишем

$\frac{2L}{\sqrt{3}}+e=1L+k$, отсюда $k-e=\frac{2L}{\sqrt{3}}-1L$;

$\frac{2L}{\sqrt{3}}=2(k+e)$, отсюда $k+e=\frac{1L}{\sqrt{3}}$;

$\frac{k+e}{2}-e=n\sqrt{3}$, отсюда $n\sqrt{3}=\frac{k-e}{2}$.

Из этих уравнений получаем

$$e=L(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}});\; k=L(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2});$$

$n\sqrt{3}=L(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2})$; $n=L(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}})$;

$2n=L(\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})$, где n – толщина стенки колодца (бочки).

Из условий задачи $D_1=\frac{2}{\sqrt{3}}L$ – это внутренний диаметр колодца от дна до начала расширения.

После установки прямых длиной $2L$ и $3L$ на диаметр D_2 и замены n его значением вычислили

$D_2=\left(\frac{2L}{\sqrt{3}}\right)+2n=L(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3})$ – это наружный наибольший диаметр колодца (бочки);

$D_3=\left(\frac{2L}{\sqrt{3}}\right)+n\sqrt{3}=L(\sqrt{3}-\frac{1}{2})$ – это наибольший диаметр расширяющейся части колодца (после подрезки верхнего острого торца).

Определены три диаметра D_1, D_2, D_3, а в условии требуется ширина (диаметр) колодца. Торец верхней части колодца представляет собой замечательный прямоугольный треугольник со сторонами n, $n\sqrt{3}$, $2n$. (В то время многие в кругах математиков считали, что мир состоит из треугольников). Подрезали верхний торец колодца на $\frac{(2n-n\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}=n(\sqrt{3}-\frac{3}{2})$. До подрезки было расширение верхней части колодца от D_1 до D_2, а после подрезки расширение останется от D_1 до D_3. Диаметр D_3 становится наибольшим диаметром расширяющейся части колодца. Автор задачи заметил, что вода, налитая в колодец до верхнего торца, внутренний диаметр которого D_3, не хранится в колодце, а сливается на постоянную величину Δ. Ширину (диаметр) колодца на уровне, до которого самосливается вода, обозначим D_4.

В прошлом математикам, в том числе и кандидатам в жрецы, легче было решать эту задачу. Они видели колодцы (бочки) в своих дворах и даже могли замерить понижение уровня воды.

Не может быть сомнения, что для составления этой задачи использовался прообраз реального колодца (бочки). Задача составлена таким образом, что испрашиваемая ширина (диаметр) определяется после вычисления ключевых размеров колодца. Очевидно, задача специально составлена для нахождения спрятанной за семью замками ширины (диаметра) поверхности воды в колодце, когда внутренний диаметр верхнего торца $D_3=L(\sqrt{3}-\frac{1}{2})$. В период формирования условий задачи не было современной теории смачиваемости, но можно было заметить мениск в залитой водой прозрачной емкости, что позволяло определить ширину зеркала воды. То же самое можно было определить по самосливу воды, когда емкость изначально была залита до уровня верхнего торца.

Вычисление ширины (диаметра), при которой вода хранится в колодце с внутренним диаметром верхнего торца D_3

Определена зона (рис. 3) возможных диаметров конической части колодца, ограниченная диаметрами $D_2 - D_1$ и катетом $n\sqrt{3}$. На катете $n\sqrt{3}$ имеется точка, которая делит его на отрезки z и $n\sqrt{3} - z$ пропорционально отношению $\dfrac{L}{n\sqrt{3}}$ или из подобия треугольников (рис. 3).

Пусть отрезок z определяет точку на катете $n\sqrt{3}$, когда выполняется условие $\dfrac{n\sqrt{3} - z}{z} = \dfrac{1L}{n\sqrt{3}}$, или из подобия треугольников (рис. 3) получим $\dfrac{1L}{n\sqrt{3}} = \dfrac{n\sqrt{3} - z}{z}$. Отсюда $z = \dfrac{n\sqrt{3} \cdot n\sqrt{3}}{1L + n\sqrt{3}}$.

Так как $2\alpha = \dfrac{2z}{\sqrt{3}} = \dfrac{2n\sqrt{3} \cdot n}{1L + n\sqrt{3}}$ (рис. 3, 4), то $D_4 = D_1 + 2n - 2\alpha$;

$$D_4 = \frac{2L}{\sqrt{3}} + 2n - \frac{2n\sqrt{3} \cdot n}{1L + n\sqrt{3}} = \frac{2L}{\sqrt{3}} + 2n\left(\frac{L - n\sqrt{3}}{L + n\sqrt{3}}\right) =$$

$$= L\left(\frac{4\sqrt{3} - \dfrac{7}{3}}{2 + \sqrt{3}}\right);$$

$$D_4 = L(1{,}2311916782116...).$$

Нам удалось вычислить диаметр D_4, как и предполагалось, близкий к диаметру D_3. Теперь осталось вычислить Δ – расстояние между верхним торцом колодца и уровнем, где ширина (диаметр) поверхности воды равна D_4 (рис. 4).

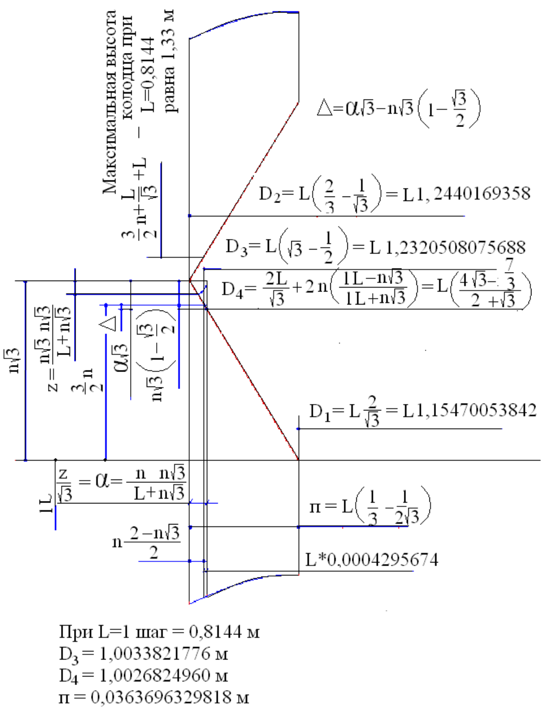


Рис. 4

Рис. 4 построен в полном соответствии со свойствами замечательного прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна удвоенной длине меньшего катета, а отношение катетов – $\sqrt{3}$.

Очевидно, что $\Delta = \alpha\sqrt{3} - n\sqrt{3} \cdot \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$$= n\sqrt{3} \cdot \left[\frac{n \cdot \left(2\sqrt{3} + 3\right) + L \cdot \left(\sqrt{3} - 2\right)}{2 \cdot \left(L + n\sqrt{3}\right)}\right] =$$

$$= L \cdot 0{,}000744024573...$$

Δ=0,00060593358… при L=0,8144 м.

Понижение уровня воды на 0,6 мм – это результат механизма «смачиваемости» (происходит самослив воды на величину мениска). Это и стало причиной поиска D_4.

Объем воды, самосливаемой из колодца, залитого до верхнего торца, вычислим по формуле

$$Q = \pi \frac{1}{4}\left(\frac{D_3 + D_4}{2}\right)^2 \cdot \Delta$$

при L=0,8144 м, Q=0,472 л.

Автор задачи сумел условиями математической задачи записать конфигурацию колодца.

Колодцы использовались для хранения воды, а также в качестве бань, прачечных. Для их обслуживания использовались тростинки. Так, для обслуживания колодца (рис. 2) глубиной $L\left(\frac{3}{2}n + 4e + 2k\right)$ могли использовать тростинки $3L$.

Эти колодцы делали разной высоты и, вероятно, в больших количествах. Деревянные заготовки для всех колодцев отличались только длиной. Эти заготовки обеспечивали сборку колодцев без дополнительных доработок на месте монтажа. Изготавливали заготовки и тростинки в мастерских.

В результате расчета были определены размеры следующих элементов:

$D_1 = L\frac{2}{\sqrt{3}}$ – внутренний диаметр цилиндрической части колодца;

$D_2 = L\cdot(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3})$ – наружный диаметр колодца. Этот диаметр необходим для вычисления отрезков n, k, e, а на стенки колодца с диаметром D_2 устанавливали прямые (тростинки) длиной $2L$ и $3L$.

$D_3 = L(\sqrt{3} - \frac{1}{2})$ – внутренний диаметр верхнего торца колодцев.

$$D_4 = L\left(\frac{4\sqrt{3} - \frac{7}{3}}{2 + \sqrt{3}}\right) = L(1{,}2311916782116...),$$

где D_4 – это диаметр (на конической части колодца), до уровня которого самосливается вода, когда колодец заполнен водой до уровня верхнего торца (диаметр D_3).

$e = L(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})$; $k = L(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})$;

$n = L(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}})$;

$e = L\cdot 0{,}211324865...$; $k = L\cdot 0{,}36602540...$;

$n = L\cdot 0{,}04465819374...$;

$n\sqrt{3} = L\cdot 0{,}0773499...$;

$\frac{3}{2}n = L\cdot 0{,}066987289...$

Анализ результатов решения задачи

В процессе решения несколько раз упоминалось о том, что координата точки пересечения тростинок совершено не зависит от высоты налитой в колодец воды. Координата пересечения тростинок зависит только от диаметра колодца, в котором они установлены, и от длин тростинок. Вода, налитая в колодец, обеспечивает самоустановку тростинок, и автору не нужно было указывать, как должны быть установлены тростинки. Все это рассчитано на знания кандидата в жрецы о взаимодействии воды и тростинок.

Математический метод решения этой задачи, когда условия задачи изложены в так называемой современной формулировке: на дно колодца опустили две палки длиной 2 и 3 м так, что они пересекаются. Расстояние от их пересечения до дна составляет 1 м. Найти диаметр основания. Эта формулировка полностью меняет смысл задачи фараона.

В тексте этой формулировки не указано, в какое место дна опущены палки и в какой плоскости колодца точка их пересечения, какая конфигурация палок. Воды нет, кто должен выставить палки и как?

В условиях задачи так называемой современной формулировки утеряна та изюминка, ради которой она и составлена.

Этот метод исключает формирование в процессе решения образа колодца как объекта. Уважаемый Лотос предложил вычислить ширину (диаметр) колодца на уровне воды, хранящейся в колодце, когда внутренний диаметр верхнего торца колодца

$$D_3 = L(\sqrt{3} - \frac{1}{2}) = L(1{,}2320508075688\ldots).$$

Вода, налитая в колодец выше D_4, не хранится в колодце, а самосливается до уровня D_4.

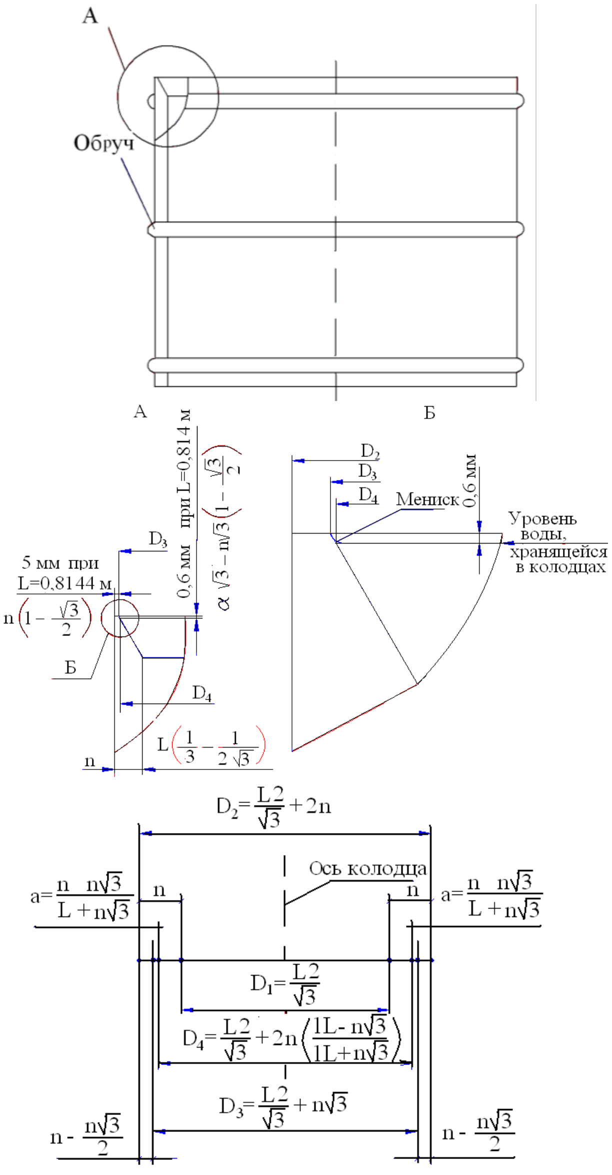


Рис. 5. Колодец Лотоса

Самым проблемным является нахождение ширины (диаметра) колодца D_4. Это связано с тем, что D_4 не является конструктивным элементом колодца.

Ширина (диаметр) D_4 приобретает смысл после определения D_3, внутреннего диаметра верхнего торца колодца. D_4 – это максимальный диаметр «зеркала» воды, хранящейся в колодцах (бочках) разной глубины.

В процессе решения сформировалась форма колодца (рис. 5).

Текст этой задачи писал человек, знающий математику, геометрию, механику и гидравлику. Он исключил возможность, в случае вычисления кандидатом в жрецы диаметров D_1, D_2, D_3, считать один из этих диаметров ответом (и требовать шаровары жреца), для чего записал: «Какова ширина (диаметр)». В процессе решения становится очевидным, что искомый диаметр должен быть на расширенном верхнем торце колодца от D_1 до D_3. На этом участке множество диаметров, но есть один, который определяется не конструкцией колодца, а «зеркалом» хранящейся в бочке воды. Задача оказалась непростой, и, возможно, до публикации вышеизложенного решения автор условия был единственным, кто знал ее решение. И, конечно, он не был заинтересован в ее решении. Он знал, чем дольше она будет не решенной, тем дольше его имя будут вспоминать. И у него это получилось, Лотос себя увековечил.

Примечание.

Если бы были построены цилиндрические колодцы с диаметрами D_4, D_3, D_2, D_1 и на их стенки установлены тростинки $3L$ и $2L$, то тростинки пересеклись бы на следующих расстояниях от дна колодцев (рис. 1). При $D_4 = L\cdot 1{,}2311916782116\ldots$ тростинки пересеклись бы на высоте $L\cdot 0{,}999997700\ldots$; $D_3 = L\cdot 1{,}2320508075688\ldots$ – $L\cdot 0{,}99987576\ldots$; $D_2 = L\cdot 1{,}2440169358\ldots$ – $L\cdot 0{,}9951\ldots$; $D_1 = L\cdot 1{,}154700538\ldots$ – $L\cdot 1{,}027\ldots$

Если бы тростинки пересеклись на высоте единицы длины от дна, то диаметр колодца был бы $L\cdot 1{,}2311857236\ldots$

«Удвоение куба» – задача дельфийского оракула

Согласно античной легенде однажды на острове Делос разразилась эпидемия чумы. Жители острова обратились к дельфийскому оракулу, и тот сообщил, что необходимо удвоить жертвенник святилища, который имел форму куба. Жители Делоса соорудили еще один такой куб и поставили его на первый, но эпидемия не прекратилась. После повторного обращения оракул разъяснил, что удвоенный жертвенник также должен иметь форму куба.

С тех пор делосской задачей занимались лучшие математики античного мира, было предложено несколько решений, однако никто не смог выполнить такое построение, используя только циркуль и линейку, поэтому постепенно сложилось общее убеждение в неразрешимости такой задачи. При попытках удвоить куб придуманы различные методы и сделаны математические открытия. Древние греки не нашли решения, которое можно выполнить с помощью циркуля и линейки, но они и не утверждали, что это невозможно. В сложившейся ситуации только решением задачи можно доказать, что она может быть решена с использованием циркуля, линейки и карандаша.

Вариант 1

Пусть имеется прямоугольный параллелепипед с длинами ребер *a*, *b*, *c*, тогда его объем $Q=a{\cdot}b{\cdot}c$.

Если необходимо увеличить объем параллелепипеда в *n* раз, тогда

$$Q{\cdot}n=n{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}c. \qquad (1)$$

Из анализа равенства (1) следует:

1. Для увеличения объема в *n* раз достаточно одно из трех ребер увеличить в *n* раз, тогда объем полученного параллелепипеда увеличится в *n* раз – $Q{\cdot}n=(n{\cdot}a){\cdot}b{\cdot}c$, но при этом параллелепипед потеряет изначальную форму.

2. Для увеличения объема параллелепипеда в *n* раз можно два из трех ребер увеличить в $\sqrt{n}$ раз, тогда $\mathrm{Q}\cdot n=(a\sqrt{n})\cdot(b\sqrt{n})\cdot c$, в этом случае также потеряется изначальная форма параллелепипеда.

3. Для увеличения объема в *n* раз можно все три ребра *a*, *b*, *c* увеличить в $\sqrt[3]{n}$ раз, тогда $Q\cdot n=(\sqrt[3]{n}\cdot a)\cdot(\sqrt[3]{n}\cdot b)\cdot(\sqrt[3]{n}\cdot c)$. В этом случае сохраняется изначальная форма параллелепипеда, при этом не меняется соотношение сторон $\frac{a}{b}=\frac{a\sqrt[3]{n}}{b\sqrt[3]{n}}$, $\frac{a}{c}=\frac{a\sqrt[3]{n}}{c\sqrt[3]{n}}$ и $\frac{b}{c}=\frac{b\sqrt[3]{n}}{c\sqrt[3]{n}}$, а $\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n}=n$, где *n* – любое натуральное число. Если необходимо уменьшить в *n* раз, тогда $\frac{Q}{n}=\frac{a}{\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{b}{\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{c}{\sqrt[3]{n}}$.

Куб – это параллелепипед, у которого ребра равны, т.е. $a=b=c$.

Если имеются параллелепипед, шар, цилиндр, пирамида и их объемы необходимо увеличить или уменьшить в *n* раз с сохранением изначальной формы, то необходимо уметь вычислять $\sqrt[3]{n}$, где $0<n<\infty$. И если в процессе решения этой задачи мы сможем вычислить $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{8}$, то сможем вычислить и $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{21}=\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2{,}5}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}}$ и т. д.

Например: $\sqrt[3]{11}=\left[\frac{\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{12}}{2}\right]$ с последующим уточнением по формуле $\frac{\pm\Delta Q}{3(\sqrt[3]{11_{\text{ср}}})^2}=\delta$, где δ – добавка, корректирующая объем до необходимого знака после запятой.

Решение задачи

Для решения задачи используем куб с ребром 1 ед. дл.

Пусть имеется куб (рис. 1) с ребрами, равными одной единице, тогда (рис. 2) каждая из шести граней – это квадраты со сторонами, равными 1 ед. дл. Угловые точки квадрата обозначим согласно рис. 2.

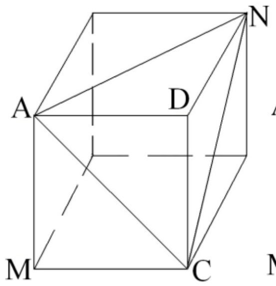


Рис. 1

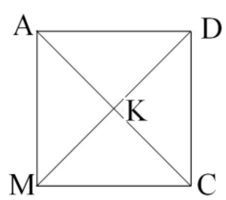


Рис. 2

Через пары точек A, C и M, D проведем прямые (средние), а точку их пересечения обозначим К. Отрезок AC=MD=$\sqrt{2}$, а точка К делит каждую из средних AC и MD на два равных отрезка. При этом AК=CК=DК=MК=$\frac{\sqrt{2}}{2}$. В дальнейшем для расчета будем использовать треугольник ADC – это грань треугольной пирамиды с основанием ANC и вершиной в точке D (рис. 1).

Из точки D (рис. 3) радиусом DК сделаем засечку на продолжении отрезка КD, а точку пересечения засечки с продолжением прямой обозначим B, при этом КD=DB=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

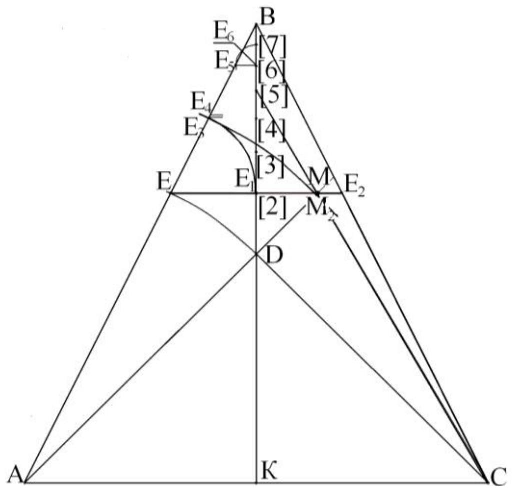


Рис. 3

Через точки A, B и C, B проведем прямые. Полученный треугольник ABC – это грань треугольной пирамиды с основанием ANC и вершиной в точке B, при этом AC=КB=$\sqrt{2}$.

Из точки A радиусом AD сделаем засечку на отрезке AB, а точку пересечения засечки с отрезком AB обозначим E. Через точку E параллельно AC проведем прямую до пересечения с BC, а точки пересечения с BК и BC обозначим E_1, E_2. Отрезок AD продлим до пересечения с отрезком EE_2, а точку пересечения обозначим M.

Из точки E радиусом EE_1 сделаем засечку на отрезке AB, а точку пересечения засечки с AB обозначим E_3 (рис. 3).

Из точки A радиусом AE_3 сделаем засечку на отрезке AM, а точку пересечения засечки с отрезком DM обозначим M_2 (рис. 4).

Через точку M_2 параллельно AC проведем прямую до пересечения с отрезком КB, а точку их пересечения обозначим [2] (рис. 4).

Отрезок E_1[2] вместе с отрезками EE_1 и E[2] образуют прямоугольный треугольник EE_1[2], гипотенуза которого является добавкой к 1 ед. дл., обеспечивающей удвоение объема.

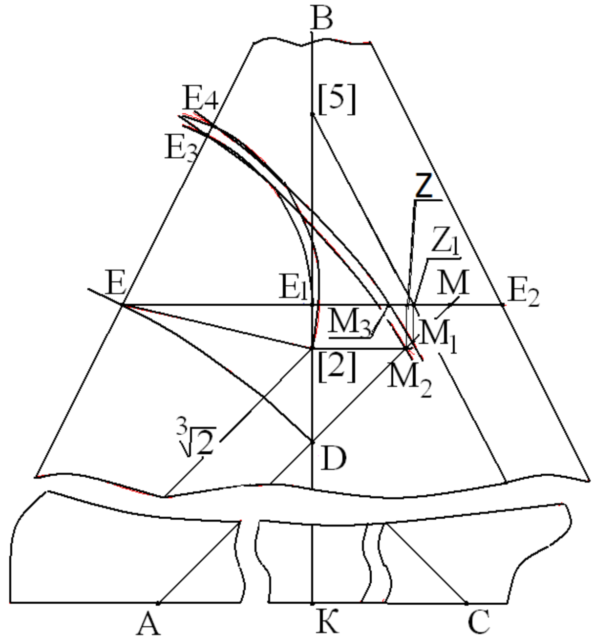


Рис. 4

Вычисление $\sqrt[3]{2}$

Через точки E и [2] проведем прямую, а из прямоугольного треугольника EE_1[2] получим $E[2] = \sqrt{(EE_1)^2 + (E_1[2])^2}$. (2)

Для решения уравнения необходимо вычислить EE_1 и E_1[2].

1. Вычисление отрезка EE_1:

Из построения рис. 4 очевидно, что EE_1=EE_3=DM_2.

Из подобия треугольников ABК и EBE$_1$

запишем $\frac{AB}{AK}=\frac{BE}{EE_1}$.

$$AB=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2{,}5};\ AK=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$BE=\ AA-1=\sqrt{2{,}5}-1;$$

$$EE_1=\ EE_3=DM_2=\frac{\sqrt{2{,}5}-1}{\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{2}}=$$

$$=0{,}2598931856865...$$

2. Вычисление отрезка $E_1[2]$:

Длину отрезка $E_1[2]$ определим по рис. 4:

$$BK=\ BB_1+E_1[2]+[2]K;$$

$$E_1[2]=BK-BE_1-[2]K;$$

$$BK=\sqrt{2};$$

BE_1 – вычислим из подобных треугольников E_1BE и KBA:

$$\frac{BE_1}{KB}=\frac{EE_1}{AC};\ BE_1=\frac{EE_1\cdot KB}{AC};$$

$$BE_1=0{,}5197863721729\ldots$$

Вычисление [2]K:

$([2]K)^2+([2]K)^2=(1+0{,}25989318568)^2$, отсюда

$$2\cdot([2]K)^2=(1{,}25989318568)^2;$$

$$[2]K=\frac{1{,}25989318568}{\sqrt{2}}=0{,}890879015169...;$$

$$E[2]=\sqrt{2}-0{,}5197863721729-$$

$$-0{,}8908790151697=0{,}00354817503...$$

Итак, вернемся к вычислению E[2] (1):

$$E[2]=\sqrt{(E_1E)^2+(E_1[2])^2}=0{,}259917405176...$$

Из точки E радиусом E[2] сделаем засечку на отрезке AB, а точку пересечения засечки с AB обозначим E_4.

$$AE_4=AE+EE_4=1+0{,}259917405176\ldots$$

$$Q=(1{,}259919253159)^3=1{,}9999826431584\ldots$$

Путем вычислений с использованием иррациональных чисел получен результат Q=1,9999826431584… Практически десятичная система с использованием иррациональных чисел может обеспечить значение 2 только в бесконечности. При вычислении можно получить в значении объема сколько угодно девяток и никогда 2.

Мы смогли вычислить объем с точностью $1\cdot10^{-5}$, а по условию задачи объем должен быть 2.

Используя разность объемов ΔQ = =2–1,9999826431584…, запишем 2–1,9999826431584=$(1+E[2]+\delta)^3-(1+E[2])^3$, где δ – добавка к длине ребра куба для приближения объема к 2. После раскрытия скобок и с учетом, что δ^2 и δ^3 стремятся к нулю, запишем 0,0000173568416=$\delta\cdot3\cdot(1{,}259917405176\ldots)^2$,

$$\text{отсюда } \delta=\frac{0{,}0000826431584}{3(1{,}259917405176)^2}=$$

$$=0{,}0000036447293...;$$

$$\sqrt[3]{2}=1{,}259919257159+0{,}00000173540803=$$

$$=1{,}259921049894...;$$

$$Q=(1{,}259921049894...)^3=1{,}9999999999957...;$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}=0{,}890898718139...$$

Автор задачи просил вычислить $\sqrt[3]{2}$. Задачу «удвоение куба» после вычисления $\sqrt[3]{2}$ можно считать решенной. Используя только значения $\sqrt[3]{2}$, можно вычислить математическое значение $\sqrt[3]{n}$, где n – любое натуральное число. Но для проверки возможности вычисления $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$, используя геометрические решения, проведем соответствующие вычисления.

Вычисление $\sqrt[3]{3}$

Через точку M_2 параллельно BK проведем прямую, а точку ее пересечения с отрезком E_1M обозначим Z (рис. 4). Из точки M радиусом MM_2 сделаем засечку на отрезке E_1Z, а точку пересечения обозначим M_3.

$$EM_3=EE_1+E_1Z-ZM_3;$$

$$EE_1=0{,}2598931856865\ldots;$$

$$E_1Z=\frac{DM_2}{\sqrt{2}}=\frac{0{,}2598931856865}{\sqrt{2}}=$$

$$=0{,}1837722339831...;$$

$$ZM_3=M_3M-MZ=MZ(\sqrt{2}-1)=$$

$$=0{,}00146754538...;$$

$$M_3M=ZM\cdot\sqrt{2};$$

$$MZ=E[2]=0{,}00354817503...;$$

$$EM_3 = 0{,}2598931856865... + \\ + \frac{0{,}2598931856865...}{\sqrt{2}} - \\ -0{,}00146754538... = 0{,}4421978742896.$$

Из точки E радиусом EM_3 делаем засечку на отрезке AB, а точку пересечения засечки с AB обозначим E_5 (рис. 3).

$$\sqrt[3]{3} = AE + EE_5 = 1 + EM_3 = 1{,}4421978742896...;$$

$$Q=(1{,}44219787428967...)^3= \\ =2{,}9996774154118...;$$

$$\delta = \frac{0{,}0003225845882876}{3(1{,}4422011500287)^2} = 0{,}0000516978708...;$$

$$1{,}4421978742896+0{,}0000516978708= \\ =1{,}4422495721604...;$$

$$(1{,}4422495721604)^3 = 3{,}0000000101563...;$$

$$\delta = \frac{-0{,}0000000101563...}{3(1{,}4422495721604)^2} = -0{,}0000000018529...;$$

$$Q=(1{,}442249570307...)^3=2{,}9999999999974...;$$

$$K[3] = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}} = 1{,}0198244530387...$$

Вычисление $\sqrt[3]{4}$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2} = 1{,}5874010519559...;$$

$$Q = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 3{,}9999999999068...;$$

$$K[4] = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = 1{,}1224620501842...$$

Вычисление $\sqrt[3]{5}$

Из точки A радиусом AE_4 сделаем засечку на отрезке DM (рис. 3, 4), а точку пересечения обозначим M_1. Через точку M_1 параллельно DM (рис. 4) проведем прямую, а точку ее пересечения с отрезком E_1M обозначим Z_1. Через точки C и Z_1 проведем прямую, а точку ее пересечения с KB обозначим [5].

Из подобия треугольников K[5]C и $E_1[5]Z_1$ запишем

$$\frac{E_1[5]}{E_1[5] + E_1K} = \frac{E_1Z_1}{KC}.$$

Для удобства в расчетах $E_1[5]$ обозначим X, тогда

$$\frac{X}{X + E_1K} = \frac{E_1Z_1}{KC}, \text{ отсюда } X = \frac{E_1K\cdot E_1Z_1}{KC - E_1Z_1};$$

$$E_1K = KB - E_1B;\ KB = \sqrt{2};$$

$E_1B = 0{,}5197863721729...$ (см. вычисление $\sqrt[3]{2}$, рис. 3), тогда

$$E_1K = \sqrt{2} - 0{,}5197863721729... = \\ = 0{,}8944271902...;$$

$$E_1Z_1 = \frac{DM_1}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}259921049894}{\sqrt{2}} = \\ = 0{,}1837919372...;$$

$$KC = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$X = \frac{E_1K\cdot E_1Z_1}{KC - E_1Z_1} = 0{,}314129262455...$$

Отрезок $K[5]=KE_1+X=1{,}208556452656...$;

$$\sqrt[3]{5} = K[5]\cdot\sqrt{2} = 1{,}7091569262395...;$$

$$Q=(1{,}7091499494885)^3=4{,}9928189497188...;$$

$$\Delta Q=0{,}00718105028...;$$

$$\delta = \frac{\Delta Q}{3\cdot(1{,}7091499494885...)^2} = \\ = 0{,}0008194129708...;$$

$$1{,}7091499494885+0{,}00082639644...= \\ =1{,}7099763392103...;$$

$$(1{,}7099763459285...)^3=5{,}0000035979856...;$$

$$\delta = \frac{-0{,}000035979856...}{3\cdot(1{,}7099763392103...)^2} = \\ = 0{,}0000003992516...;$$

$$(1{,}7099759466769)^3=5{,}0000000000016...;$$

$$(1{,}709975946676)^3=4{,}9999999999937...;$$

$$K[5] = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}} = 1{,}2091355895894...$$

Вычисление $\sqrt[3]{6}$

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3} = 1{,}8171205928245...;$$

$$(1{,}8171205928245...)^3=5{,}9999999999245...;$$

$$K[6] = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}} = 1{,}284898295576...$$

Вычисление $\sqrt[3]{7}$

Из точки E радиусом EM_3 (рис. 3, 4) сделаем засечку на отрезке AB, а точку пересечения обозначим E_5. Через точку E_5 проведем параллельно AC прямую, а точку ее пересечения с BK обозначим E_6. Из точки E_6 радиусом E_6E_5 сделаем засечку на отрезке

E_6B, а точку пересечения обозначим [7].

$$K[7]\cdot\sqrt{2}=\sqrt[3]{7};$$

$$K[7]=KB-[7]B;$$

$$[7]B=\frac{1}{2}E_6B=0{,}062113152969...$$

BE_6 вычислим из подобия треугольников E_5BE_6 и ABK.

$$\frac{E_5B}{AB}=\frac{BE_6}{AK},\ \text{отсюда}\ BE_6=\frac{E_5B\cdot AK}{AB};$$

$$E_5B=AB-AE_5=\sqrt{2{,}5}-\sqrt[3]{3}=0{,}13888923...;$$

$$AB=\sqrt{2{,}5};\ AE_5=\sqrt[3]{3};$$

$$BE_6=\frac{E_5B\cdot\sqrt{2}}{AB}=0{,}1242263059...;$$

$$K[7]=\sqrt{2}-0{,}062113152969=$$
$$=1{,}352100409404...;$$

$$K[7]\cdot\sqrt{2}=1{,}9121587334606...;$$

$$(1{,}9121587334606\ldots)^3=6{,}9915235392185\ldots;$$

$$\delta=\frac{0{,}0084764607815}{3(1{,}9121587534606)^2}=0{,}0007727613979...;$$

$$(1{,}91293120)^3=7{,}000003426\ldots;$$

$$\delta=\frac{0{,}000003426046}{3(1{,}9129314948585)^2}=0{,}000000312085...;$$

$$(1{,}91293118277)^3=6{,}9999999999828\ldots;$$

$$K[7]=\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{2}}=1{,}3526466135496...$$

Вариант 2

Для решения задачи используем куб с ребром 1 ед. дл.

Пусть имеется куб (рис. 1), тогда каждая из шести граней является квадратом со сторонами, равными 1 ед. дл.

Вершины квадрата обозначим (рис. 1) A, D, C, M. Через точки A, C и M, D проведем прямые (средние), а точку их пересечения обозначим K. При этом $AC=MD=\sqrt{2}$, а точка K делит каждый из отрезков AC и MD, тогда

$$AK=CK=DK=MK=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В дальнейшем в расчетах будем использовать треугольник ADC, который является гранью пирамиды с основанием ANC и вершиной в точке D (рис. 1).

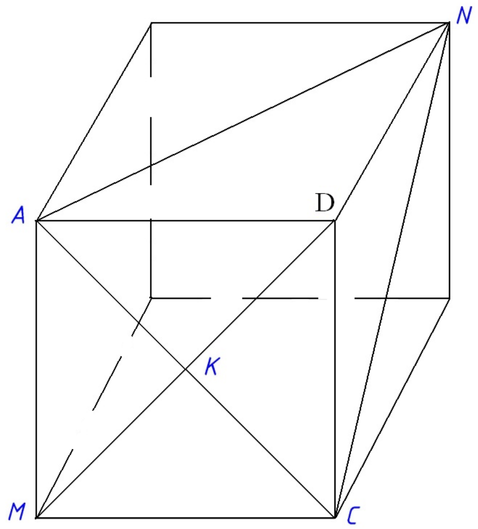


Рис. 1

Для продолжения решения задачи построим рис. 2.

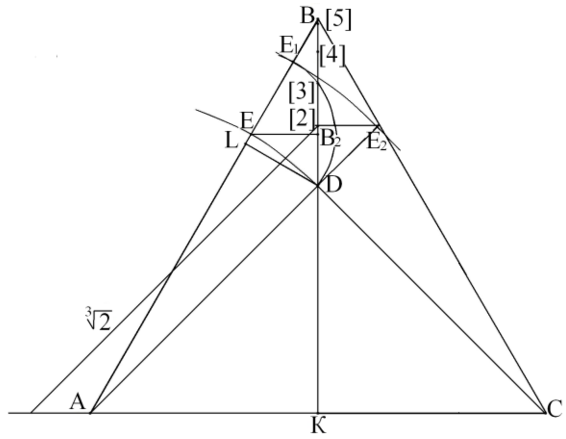


Рис. 2

Используем треугольник ADC (грань пирамиды) с основанием ANC и вершиной в точке D, где $KD=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Из точки A радиусом AC сделаем засечку на продолжении отрезка KD. А точку пересечения обозначим B.

Через пары точек A, B и C, B проведем прямые. В результате получаем равносторонний треугольник ABC, представляющий собой грань пирамиды с основанием ANC и вершиной в точке *B*, при этом

$$AC = AB = BC = \sqrt{2}.$$

Вычисление $\sqrt[3]{2}$

Из точки A радиусом AD сделаем засечку на отрезке AB, а точку пересечения засечки с AB обозначим E. Через точку E параллельно AC проведем прямую, а точку пересечения с BK обозначим B_2. Из точки D построим перпендикуляр к AB, точку пересечения обозначим L. ABK и LBD – это замечательные прямоугольные треугольники, у которых меньший катет равен $\frac{1}{2}$ гипотенузы, а соотношение катетов – $\sqrt{3}$.

$$KB = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 1{,}2247448713428...;$$

$$BD = KB - KD = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = $$
$$= 0{,}5176380901563...$$

Рассмотрим замечательный треугольник LBD.

$$BE = AB - 1 = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414213562373...;$$

$$LD = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) = 0{,}2588190450781...$$

Вычисление отрезка EL:

$$EL = BL - BE = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) - \left(\sqrt{2}-1\right) =$$
$$= 0{,}0340693149872...$$

По теореме Пифагора

$$ED = \sqrt{(DL)^2 + (EL)^2} = 0{,}2610517502682...$$

Из точки E радиусом ED сделаем засечки на отрезках EB и KB, а точки пересечения с EB и KB обозначим E_1 и [3].

Из точки A радиусом AE_1 сделаем засечку на продолжении прямой AD, а точку пересечения обозначим E_2 (AE_2 – это длина ребра, обеспечивающая удвоение объема куба). Через точку E_2 параллельно AC проведем прямую, точку пересечения с KB обозначим [2].

$$AE_1 = AE_2 \cdot \sqrt[3]{2} = AD + DE_2 =$$
$$= 1 + 0{,}2610517502682...,$$

тогда

$$(1{,}2610517502682)^3 = 2{,}0053894586959\ldots;$$

$$\delta_1 = \frac{0{,}0053894586959}{3(1{,}2610517502682)^2} =$$
$$= -0{,}0011296868532...;$$

$$(1{,}259922063415)^3 = 2{,}0000048265926\ldots;$$

$$\delta_2 = \frac{0{,}0000048265926}{3(1{,}259922063415)^2} = -0{,}0000010135192...;$$

$$Q = (1{,}25992104989)^3 = 1{,}9999999999767\ldots;$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = 0{,}89089871963...$$

Вычисление $\sqrt[3]{3}$

Пусть отрезок K[3] определяет длину стороны квадрата, средняя которого равна $\sqrt[3]{3}$. Тогда $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}} = K[3] = KB_2 + B_2[3]$.

Из замечательного прямоугольного треугольника EBB_2

$$KB_2 = KB - BB_2;\ KB = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2};$$

$$BB_2 = \frac{AE-1}{2}\cdot\sqrt{3};\ AB = \sqrt{2};$$

$$BB_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\sqrt{3} = 0{,}3587194675928...;$$

$$KB_2 = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\sqrt{3} = 0{,}8660254037528.$$

Из треугольника $E[3]B_2$

$$B_2[3] = \sqrt{(E[3])^2 - (EB_2)^2};$$

$$E[3] = ED = 0{,}2610517502689...;$$

$$KB_2 = \frac{EB}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0{,}20710678118...;$$

$$B_2[3] = \sqrt{(0{,}25992104989)^2 + \left(\frac{0{,}414213562373}{2}\right)^2} =$$
$$= 0{,}15705328192\ldots;$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}} = K[3] = 0{,}86602540375... +$$
$$+ 0{,}15705328192 = 1{,}02307868567;$$

$$\sqrt[3]{3} = 1{,}02307868567 \cdot \sqrt{2} = 1{,}4468517526492...;$$

$$(1{,}4468517526492)^3 = 3{,}028810513488\ldots;$$
$$(1{,}4422641935234)^3 = 3{,}0000912534702\ldots;$$
$$(1{,}4422495704558)^3 = 3{,}0000000009259\ldots;$$
$$(1{,}4422495703075)^3 = 3{,}0000000000004\ldots;$$

$(1{,}4422495703074)^3$=2,9999999999998…;

Q=2,9999999999998…;

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}=\mathrm{K}[3]=1{,}0198244540387...$$

Вычисление $\sqrt[3]{4}$

Для вычисления $\sqrt[3]{4}$ не требуется сложных геометрических решений:

$$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=1{,}5874010519559...;$$

$$\mathrm{Q}=\left(\sqrt[3]{4}\right)^3=3{,}9999999999068...;$$

$$\mathrm{K}[4]=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}=1{,}1224620501842...$$

Вычисление $\sqrt[3]{5}$

Отрезок EL разделить на две равные части циркулем, перенести половину отрезка EL, при этом ножку циркуля поставить в точку B и на отрезке BK сделать засечку, а точку пересечения с BK обозначим [5].

Тогда $\sqrt[3]{5}=\mathrm{K}[5]\cdot\sqrt{2}$;

$$\mathrm{K}[5]=\mathrm{KB}-\mathrm{B}[5]=1{,}2247448713420...-$$

$$-\frac{0{,}03406931449872}{2}=1{,}2077102138784...;$$

$$\mathrm{K}[5]=1{,}2077102138784...;$$

$$\sqrt[3]{5}=1{,}7099601610173...;$$

$(1{,}7099601610173)^3$=4,999861528634…

С учетом уточнений

$Q=(1{,}709975946676)^3$=4,9999999999937…;

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}=1{,}2091355895894...$$

Рис. 2 не позволяет вычислить $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{7}$, но, учитывая, что $\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{6}$ можем вычислить без чертежа.

$\sqrt[3]{7}$ вычислим по среднему с последующим уточнением.

$$\sqrt[3]{7}=\frac{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{8}}{2}=1{,}9085602964122...$$

После уточнения

$Q=(1{,}91293118271)^3$=6,99999999998…;

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{2}}=1{,}3526466135496...$$

Вычисление $\sqrt[3]{6}$

$$\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}=1{,}8171205928245...;$$

$(1{,}8171205928245\ldots)^3$=5,9999999999245…;

$$\mathrm{K}[6]=\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}=1{,}284898295576...$$

Решив задачу «удвоение куба» в полном объеме и в двух вариантах, можно ответить на вопрос, почему задача называется «удвоение куба».

Решение задачи показало, что достаточно вычислить $\sqrt[3]{2}$, а далее, используя его значение, математически вычислить значение $\sqrt[3]{n}$.

Например:

Если известно $\sqrt[3]{2}$, то $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{3}=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}$; $\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{5}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}}{2}$; $\sqrt[3]{7}=\frac{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{8}}{2}$; $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{11}=\frac{\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{12}}{2}$ и т. д. При этом для получения точного значения, например $\sim 10^{-10}$, необходимо использовать механизм вычисления поправок (см. вычисление $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ и др.).

Решение задачи выполнено в двух вариантах в полном объеме с целью доказательства, что все $\sqrt[3]{n}$ можно вычислить с помощью циркуля, линейки (без шкалы) и карандаша. И необходимо отметить, что достаточно вычислить только $\sqrt[3]{2}$, чтобы составить таблицу $\sqrt[3]{n}$. Автор условий задачи знал об этом, а потому и назвал задачу «удвоение куба».

Трисекция угла

Решение задачи «трисекция угла» означает деление дуги на три равные части. В окружности любого диаметра равные части дуги имеют равные хорды. Если определим равные хорды, задача решена.

Пусть имеется дуга AB (рис. 1).

Через точки A и B проведем прямую AB, которая является хордой дуги AB. Известным методом, используя циркуль, поделим хорду AB на два равных отрезка, а точку деления обозначим L.

Через точку L, используя циркуль, с точек A и B радиусом, большим половины отрезка AB, сделаем засечки, а через пересечение засечек проведем прямую (перпендикулярно к AB), точку пересечения прямой (перпендикулярно к AB) обозначим K.

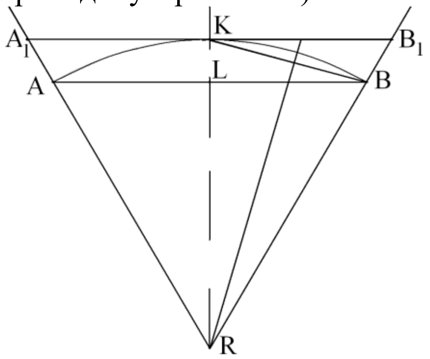


Рис. 1

При этом точка K делит дугу AB на две равные части.

Через точки K и B (или A) проведем прямую, отрезок KB разделим на две равные части, используя засечки циркулем из точек K и B. Через пересечение засечек проведем прямую, а точку пересечения с прямой, проведенной через точки K и L, обозначим R.

Через точку K параллельно хорде AB проведем прямую. Через пары точек R, A и R, B проведем прямые, а точки их пересечения с прямой, проведенной через точку K параллельно AB, обозначим соответственно A_1 и B_1.

Для удобства и улучшения наглядности упростим рис. 1 (исключим засечки и отрезки, использовавшиеся для построения). Для обеспечения продолжения решения задачи рассмотрим рис. 2 (без вспомогательных элементов для построения рис. 1).

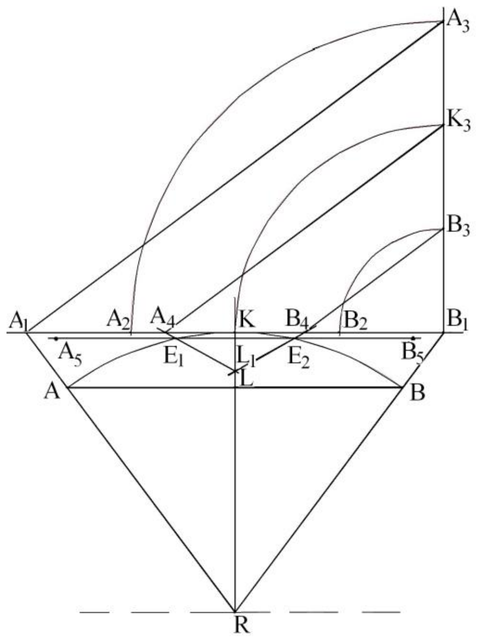


Рис. 2

Отрезок касательной A_1B_1 разделим на три равные части (рис. 2). Для деления используем свойства замечательного прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5, где 3, 4 – катеты, а 5 – гипотенуза.

Деление отрезка A_1B_1 проведем в следующей последовательности:

1. Отрезок A_1B_1 примем за катет 4 и разделим на четыре равных отрезка (метод известный), а точки деления отрезков A_1K и B_1K на два обозначим A_2 и B_2 соответственно.

2. Через точку B_1 (или A_1) параллельно отрезку KR проведем прямую.

3. Из точки B_1 радиусами B_1B_2, B_1K, B_1A_2 сделаем засечки на прямой, проведенной параллельно отрезку KR, а точки пересечения обозначим B_3, K_3, A_3.

4. Через точки A_1 и A_3 проведем прямую (это гипотенуза замечательного треугольника со сторонами 3, 4, 5).

5. Через точки B_3 и K_3 параллельно отрезку A_1A_3 проведем прямые, а точки их пересечения с A_1B_1 обозначим B_4, K_4 соответственно.

Отрезок A_1B_1 разделен точками K_4, B_4 на три равных отрезка $A_1K_4=K_4B_4=B_4B_1$.

Отрезок A_5B_5 разделим ранее описанным методом деления отрезка A_1B_1 на три равные части с использованием замечательного треугольника со сторонами 3, 4, 5.

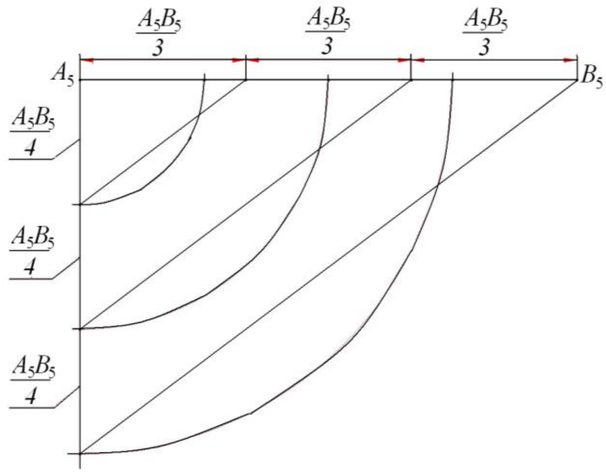


Рис. 3

Квадратура круга

В процессе развития хозяйственной деятельности у человечества возникла потребность в поиске форм сосудов, сооружений, бассейнов, загонов для домашнего скота. Необходимо было найти оптимальные конфигурации сооружаемых объектов, когда при наименьших затратах труда, средств, материалов можно:

– построить бассейн наибольшей площади;

– изготовить сосуд наибольшего объема;

– огородить загон для домашнего скота наибольшей площади.

Площади, периметры, объемы стали объектом внимания.

1. Рассмотрим соотношение площади квадрата со стороной, равной L, и площади квадрата, сторона которого равна радиусу круга R, когда площадь круга равна площади квадрата.

Пусть имеется квадрат со стороной L, тогда площадь его $S_{кв.L}=L^2$.

Пусть имеется квадрат со стороной R, когда R – радиус круга, тогда $S_{кв.R}=R^2$.

Чтобы уравнять площади $S_{кв.L}$ и $S_{кв.R}$, введем коэффициент и обозначим его π. Запишем равенство $L^2=R^2\cdot\pi$.

После вычисления коэффициента π можно будет менять форму площади с квадрата на круг и наоборот с сохранением ее значения.

Вычисление коэффициента π

Имеется $L^2=R^2\cdot\pi$.

Умножим обе части равенства на 1 ед. дл., тогда $L^2\cdot 1$ ед. дл.$=R^2\cdot\pi\cdot 1$ ед. дл.

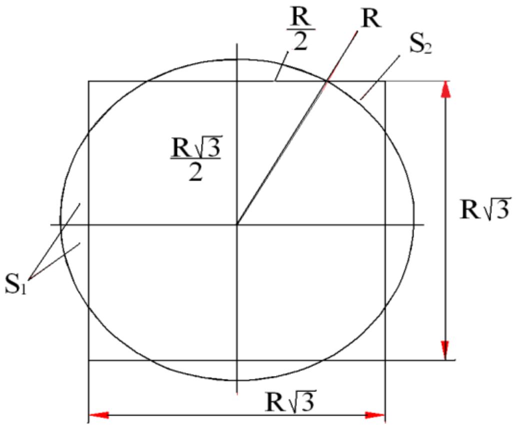
Пусть L и R равны 1 ед. дл., тогда (1 ед. дл.)$^2\cdot 1$ ед. дл.$=R^2\cdot\pi\cdot h\cdot 1$ ед. дл., где h – коэффициент для сохранения равенства после замены L и R на 1 ед. дл.

$$\pi=\frac{(1\,\text{ед. дл.})^3}{h(1\,\text{ ед. дл.})\cdot(1\,\text{ед. дл.})^2}=\frac{1\,\text{ед. дл.}}{h(1\,\text{ ед. дл.})}=\frac{1}{h}..$$

Выражение $\pi=\frac{1}{h}$ можно получить математически. Пусть $\frac{L^2}{R^2}=\pi$; а $\frac{R^2}{L^2}=h$, тогда $\frac{L^2}{R^2}\cdot\frac{R^2}{L^2}=\pi\cdot h$, отсюда $1=\pi\cdot h$, где h – это коэффициент отношения площади квадрата, у которого сторона равна радиусу круга, к площади квадрата со стороной L, когда площадь круга равна площади квадрата.

Из анализа формулы $\pi=\frac{1}{h}$ следует, что произведение $\pi\cdot h$ никогда не может достичь 1 и даже в бесконечности всегда имеет вид 0,9999… При этом меняется количество девяток от одной до бесконечности.

Учитывая, что π и h – это коэффициенты для уравнения площадей квадратов и кругов, построим квадрат, используя радиус окружности R, и вычислим его площадь (через радиус окружности). Для построения используем свойства замечательного прямоугольного треугольника, у которого меньший катет равен половине гипотенузы, а отношение катетов – $\sqrt{3}$ (рисунок).



Из рисунка видно, что площадь квадрата равна $3R^2$, а площадь круга – πR^2. Чтобы уравнять площади круга и квадрата, необходимо к площади квадрата прибавить разность площадей $4(S_1–S_2)$, тогда

$$S_{кв}=3R^2+4((S_1–S_2); \qquad (1)$$

$$S_1=\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2}=R^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right);$$

$$S_2=\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{R}{2\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=R^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right);$$

$$\left(S_1-S_2\right)=R^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=R^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\right).$$

После вычисления S_1 и S_2 равенство (1) примет вид $S_{кв}=3R^2+4R^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\right)$, а значит, когда π=3, $S_{кв}=3R^2$.

Отсюда следует, что целая цифра в коэффициенте π равна 3.

Пусть имеется сетка длиной l для ограждения участка земли. Необходимо выбрать форму участка, при которой огражденный участок имел бы наибольшую площадь.

Площадь квадрата равна $\left(\frac{l}{4}\right)^2=S_{кв}$.

Периметр круга $l=2\pi R$, отсюда $R=\frac{l}{2\pi}$,

тогда $S_{кр}=\pi\left(\frac{l}{4\pi}\right)^2=\frac{\pi l^2}{4\pi^2}=\frac{l^2}{4\pi}$;

$$S_{кр}-S_{кв}=\frac{l^2}{4\pi}-\frac{l^2}{16}=\frac{l^2}{4}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{l^2}{4}\left(\frac{4-\pi}{4\pi}-\frac{1}{4}\right)=l^2\cdot 0{,}0170775387...$$

Участок в форме круга, огражденный сеткой длиной l, будет иметь большую площадь на $S_{кр}-S_{кв}=l^2\cdot 0{,}0170775387$ по сравнению с огражденным участком в форме квадрата. Для ограждения участка в форме круга нужно меньше сетки, чем для ограждения такой же площади в форме квадрата на

$$\Delta l=l\sqrt{0{,}0170775387}=l\cdot 0{,}130681057,$$

при l=100 ед. дл. экономия сетки составляет 13 ед. дл.

Примечание.

Численное значение коэффициента π, входящего в выражение $l=2\pi R$, получено после открытия дифференциального и интегрального исчислений с использованием выражения tg45°=1, отсюда $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}=1$. Численные значения коэффициента π, входящего в выражение $S=\pi R^2$, вычислены в процессе решения задачи «квадратура круга».

В материалах из Википедии имеются сведения, которые не исключают, что задача «квадратура круга» упоминается в работе, восходящей к 3400 г. до н. э.

Необходимо отметить, что до открытия дифференциального и интегрального исчислений вычислить значение π, используя выражение $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}=1$, не представлялось возможным, а решить задачу «квадратура круга» и вычислить значение π была возможность и в период с 3400 г. до н. э.

ставлены выполненные автором решения «нерешаемых задач», относящихся к VIII веку до нашей эры.

Статья поступила 03.07.2017