

УДК 539.4

Ю. М. Муляр, В. М. Федоров, Л. М. Трясучев

О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ НА ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ОСЕВОГО СЖАТИЯ

Представлено экспериментальное и теоретическое обоснование явления внезапного выпучивания с динамическим эффектом при потере устойчивости прямолинейного стержня с реально существующими несовершенствами. Установлена взаимообусловленная связь начальных несовершенств и интенсивности выпучивания в эффекте нулевой жесткости предельно сжатого стержня при потере устойчивости в большом.

Подано експериментальне та теоретичне обґрунтування явища раптового випинання з динамічним ефектом при втраті стійкості прямолінійного стрижня з реально існуючими недосконалостями. Установлено взаємозумовлений зв'язок початкових недосконалостей і інтенсивності випинання внаслідок ефекту нульової жорсткості гранично стиснутого стрижня під час втрати стійкості у великому.

The experimental and theoretical justification is presented for the phenomenon of sudden buckling with dynamic effect at stability loss of a rectilinear rod with real existing imperfections. The interdependent connection is established between the initial imperfections and buckling intensity in the effect of zero rigidity of an utmost compressed rod at stability loss in the large.

Введение

К числу нерешенных проблем при наземной экспериментальной отработке образцов ракетно-космической техники относится прогнозирование разрушения отсеков ракет-носителей (РН). Прогнозирование разрушения конструкций является серьезнейшей проблемой в самых различных областях машиностроения, включая ракетно-космическую технику, авиацию, атомную и химическую промышленность, разные виды транспорта и строительные сооружения. Одним из важных условий прогнозирования гарантированной прочности нагруженных силовых элементов при эксплуатации пространственных конструкций является разработка достоверных, экспериментально обоснованных теоретических методов расчета устойчивости тонкостенных несущих элементов пространственных конструкций в условиях нагружения сжимающими силами.

Сжатие осевой силой относится к наиболее распространенным видам нагружения конструкций. В таком случае разрушение пространственной конструкции может произойти вследствие потери устойчивости тонкостенных силовых элементов. Потеря

устойчивости при осевом сжатии характеризуется внезапным выпучиванием тонкостенной обечайки оболочечных отсеков или стержневых элементов при значении осевой силы, равном критическому значению. В настоящее время отсутствуют технические средства и методы упреждающего прогнозирования такого вида разрушения. Одна из возможных причин в том, что не установлена физическая природа явления потери устойчивости. Основанием для такого предположения служит, в частности, отсутствие решения практически важной задачи устойчивости удлиненной вертикальной стойки с торцевой опорой. Данная задача относится к числу нерешенных проблем потери устойчивости в большом с динамическим эффектом выпучивания.

Постановка задачи

Представляется вполне естественным, что для внезапного выпучивания стойки с торцевой опорой необходим поперечный механический импульс. Однако природа возникновения поперечного импульса при потере устойчивости остается загадкой для исследователей. Как свидетельствует известный специалист в области устойчивости простран-

ственных конструкций В. И. Феодосьев: «Предложенная задача затрагивает принципиально новые вопросы устойчивости и не может быть решена обычными методами» [1, с. 260]. На эту сторону проблемы указывает в своих высказываниях ряд других ученых – специалистов в области устойчивости деформируемых систем. Так, известный американский ученый, специалист в области механики сплошных сред К. Трусделл подчеркивает: «Когда мы пробуем, однако, подойти к исследованию понятия устойчивости вообще, оказывается, что трудно не только исследовать, но в первую очередь даже трудно точно определить его» [2, с. 350]. По существу данной проблемы точки зрения американских и российских ученых совпадают. Подтверждением служит высказывание В. В. Болотина [3]: «...Метод Эйлера в теории упругой устойчивости не включает в себя, по существу, понятия устойчивости... наличие точки разветвления не является ни необходимым, ни достаточным условием смены устойчивости».

В связи с тем, что потеря устойчивости в большом характеризуется **динамическим эффектом выпучивания (хлопком)**, вполне обосновано замечание академика Ю. Н. Работнова, что бифуркационный критерий устойчивости устанавливает возможность или невозможность смежного состояния равновесия, тогда как при потере устойчивости может наступить не новое состояние равновесия, а состояние движения системы. Поэтому естественная постановка задачи устойчивости состоит именно в изучении возможности движения механической системы [4, с. 218]. Данной проблеме посвящена настоящая статья. Рассматривается потеря устойчивости прямолинейного стержня с реально существующими несовершенствами.

Математическое модельное представление явления внезапного выпучивания стержня

На первом этапе исследования механизма выпучивания стержня анализируется возможное изменение исходной прямолинейной формы при слабых возмущающих воздействиях окружающей среды. С

этой целью используется дифференциальное уравнение в вариациях. Интенсивность возмущающих механических воздействий неконтролируемого характера ограничивается уровнем естественного шума окружающей среды. Отклик пространственной деформируемой системы на внешние непредусмотренные воздействия характеризуется виртуальными прогибами δv в сколь угодно малой окрестности исходного равновесного состояния. На энергетической шкале произвольных деформаций виртуальное состояние сжатого стержня в динамической постановке характеризуется неоднородным дифференциальным уравнением в вариациях

$$EI \frac{\partial^4(\delta v)}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2(\delta v)}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2(\delta v)}{\partial t^2} = \delta q(x, t), \quad (1)$$

где EI – жесткость стержня на изгиб; N_0 – внутреннее усилие, равное значению осевой сжимающей силы T ; ρ – плотность материала; F – площадь поперечного сечения стержня. Бесконечно малой вариацией $\delta q(x, t)$ характеризуется поле кинематически возможных изменений внешней поперечной нагрузки, которая отвечает слабым возмущающим воздействиям в недетерминированном виде. Такие воздействия, вибрации на виртуальном уровне, являются объективно существующим фактором в реальных условиях (слабые колебания фундамента или вибрации в испытательной установке, вибрации при полете ракеты-носителя).

Допустимые виртуальные прогибы $\delta v(x, t)$ характеризуют тенденцию рассматриваемого стержня к изменению исходной формы в действительных прогибах. Граничные условия шарнирной опоры позволяют представить виртуальные параметры δq и δv в виде бесконечного ряда гармоник по синусам $\delta q_n = \delta f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$,

$\delta v_n = \delta f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$, где $n = 1, 2, 3$ – число полуволн. Приближенное решение задачи на основе метода Бубнова-Галеркина позволяет получить частотное уравнение в вариациях. Соответствующему однородному

уравнению свободных колебаний на виртуальном уровне отвечают собственные колебания с круговыми частотами, определяемыми соотношением $\omega_n^2 = \frac{C_n}{\rho F}$. При $\omega_n \neq 0$

стержень сохраняет исходную форму статического равновесия. Малая окрестность виртуальных колебаний сжатого стержня вблизи исходной конфигурации ограничивается возвращающими силами, определяемыми **коэффициентом приведенной конструктивной жесткости стержня на изгиб**

$C_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI - N_0 \right)$. Возвраща-

ющие силы, характеризуемые данным параметром, действуют в упругом стержне идеальной прямолинейной формы, изготовленном из однородного материала с изотропными свойствами. Возвращающие силы действуют также при изгибе стержня с объективно существующими несовершенствами, включая малые начальные погиби неконтролируемого характера и неоднородности механических свойств конструкционного материала.

По результатам исследования влияния малых возмущающих воздействий на устойчивость оболочек [5] и кольца круговой формы в статической и динамической постановке [6] впервые установлено, что коэффициент приведенной конструктивной жесткости на изгиб служит важным критерияльным параметром при потере устойчивости в малом. При неограниченном уменьшении уровня возмущений при постоянном значении осевой силы ($N_0 = \text{const}$) амплитуда виртуального прогиба может быть сколь угодно малой, если коэффициент $C_n \neq 0$. В итоге при ненулевом значении приведенной конструктивной жесткости обеспечивается свойство деформируемой системы – незначительно отклоняться от исходного положения равновесия при действии слабых возмущений. Данный вывод отвечает критерию устойчивости по Ляпунову и распространяется на стержневые системы и тонкостенные оболочки. С точки зрения динамической устойчивости при условии $C_n \neq 0$ обеспечиваются слабые колебания деформируемой системы в доста-

точно малой окрестности исходного состояния. Центральное-сжатый стержень (стойка) при малых возмущениях, совершая колебания на виртуальном уровне, не переходит к качественно новому состоянию равновесия.

В то же время увеличение осевой силы, характеризуемой параметром N_0 , приводит к изменению коэффициента C_n в сторону уменьшения, происходит своего рода «релаксация» – понижение приведенной конструктивной жесткости деформируемой системы. Колебательные движения системы на виртуальном уровне замедляются вследствие ослабления упругих возвращающих сил. **Когда приведенная конструктивная жесткость в плоскости минимальной жесткости становится равной нулю, проявляется свойство пространственной конструкции воспринимать избирательно в «резонансе» сколь угодно слабые возмущающие воздействия, не отличающиеся от шума окружающей среды.** В концептуальных моделях синергетики [7] данной проблеме уделяется особое внимание. Обнаруженное свойство «самовозбуждения» предельно сжатых пространственных конструкций в точке бифуркации углубляет представление об особенностях разрушения конструкций и позволяет обосновать концепцию Эйлера в решении задач устойчивости в малом.

Анализ виртуального состояния шарнирно-закрепленного стержня в статической постановке задачи с учетом приведенного выше ряда Фурье для виртуальных параметров δq и δv позволяет получить для каждой гармоники зависимость $\delta \lambda_n = C_n \delta f_n$ в развернутом виде:

$$\delta \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI - N_0 \right) \delta f_n. \quad (2)$$

При нулевом значении коэффициента приведенной конструктивной жесткости $C_n = 0$ усилие N_0 рассматривается как функция числа волн (полуволн). Из условия аналитического минимума параметра N_0 находится конкретное число $n = n^*$ для основной формы изгиба. В результате при заданных граничных условиях **в точке бифуркации, характеризующейся отсутствием приведенной конструктивной жесткости на из-**

гиб, определяется основная форма изгиба как наиболее вероятная. Основная форма изгиба для предельно сжатого прямолинейного стержня реализуется при пороговом значении параметра $N_0^* = \frac{\pi^2}{L^2} EI$ в случае шарнирного закрепления и при значении $N_0^* = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$ в случае жесткого защемления торцов. В таком же виде записываются классические формулы Эйлера для определения критической силы при потере устойчивости стержня. Как следует из соотношения (2), пороговому значению параметра N_0 в отсутствие приведенной конструктивной жесткости $C^*=0$ для основной формы изгиба отвечает неограниченное возрастание амплитуды виртуального прогиба при сколь угодно малых возмущающих воздействиях.

В реальных условиях потери устойчивости прямолинейный стержень и другие деформируемые системы правильной геометрической формы (пластины, тонкостенные оболочки) спонтанно получают в *детерминированном виде макромасштабные прогибы*, характеризующиеся достаточно малыми амплитудами в конечных действительных величинах. **При нулевой приведенной жесткости на изгиб в состоянии «самовозбуждения» предельно сжатого стержня обеспечивается спонтанное возникновение макромасштабного прогиба в детерминированном виде для основной формы изгиба.** По существу, здесь имеет место скачкообразный переход от напряженно-деформированного состояния стержня на уровне виртуальных прогибов к напряженно-деформированному – в действительных макромасштабных прогибах. Такой спонтанный, самопроизвольный процесс логично рассматривать как **эффект нулевой жесткости**. В эффекте нулевой жесткости предельно сжатый стержень теряет способность сопротивляться внешним воздействиям на уровне шума окружающей среды. В таком случае слабые возмущающие воздействия сколь угодно малой интенсивности способны привести к «макроскопически регистрируемому результату».

В современной постановке задачи устойчивости используется концепция Эйлера, согласно которой заведомо предполагается, что деформируемая система в условиях сжатия, в частности центрально-сжатый прямолинейный стержень, по той или иной причине может принимать слабоизогнутую макромасштабную форму в действительных прогибах. В таком случае рассматривается однородное дифференциальное уравнение статического равновесия в постановке Эйлера

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + N_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

В классической механике предполагается, что возникновение прогиба $w(x)$ смежной формы равновесия обусловлено начальными несовершенствами. В таком случае взаимная связь начальных несовершенств и прогиба $w(x)$ должна получить отражение в той или иной математической модели. Однако дифференциальное уравнение (3) используется для определения критической силы без учета начальных несовершенств. Более того, нетривиальное решение однородного уравнения (3) свидетельствует о том, что прогиб $w(x)$ отсутствует до момента достижения эйлеровой силы. В таком случае причина внезапного возникновения поперечного прогиба в точке бифуркации центрально-сжатого стержня без дефектов и стержня с непредусмотренными несовершенствами требует объяснения. В нетривиальном решении данного уравнения стрела прогиба $w(x)$ характеризуется неопределенным значением. Такой результат согласуется с данными экспериментов. Поэтому в инженерной практике ограничиваются формулой Эйлера, не уделяя внимания поперечному механическому импульсу при внезапном выпучивании стержня. Наблюдение и опыт свидетельствуют о том, что выпучивание упругого стержня с несовершенствами происходит при критическом значении осевой силы, равном эйлеровой силе, и характеризуется эффектом прощелкивания.

С другой стороны, тщательно изготовленный прямолинейный стержень при осевом сжатии теряет устойчивость при эйле-

ровой силе без явно выраженного эффекта прощелкивания как в условиях шарнирной опоры, так и в условиях жесткого защемления торцов. В частности, без эффекта прощелкивания происходит потеря устойчивости стержня с закрепленными концами при равномерном нагреве по всей длине. Как известно [8], выпучивание стержня в условиях нагрева происходит без каких-либо активных нагрузок. Нетривиальным решением однородного дифференциального уравнения (3) для нагретого стержня определяется критическое значение осевой силы, которое характеризуется потерей устойчивости в малом. При потере устойчивости в малом рассматривается смежная форма равновесия, бесконечно близкая к исходной форме. Однако механизм возникновения прогибов смежной формы равновесия в литературе отсутствует. Не описан также процесс возникновения конечных прогибов несмежной формы равновесия при внезапном выпучивании упругого стержня с несовершенствами.

Механизм выпучивания прямолинейного упругого стержня при потере устойчивости в малом, без прощелкивания, и механизм внезапного выпучивания стержня с явно выраженным динамическим эффектом прощелкивания характеризуются принципиальным различием. Чтобы убедиться в этом, необходимо уделить внимание слабым возмущающим воздействиям окружающей среды. С этой целью представляется целесообразным рассмотреть потерю устойчивости удлиненной металлической трубки [1] с жидкостью или газом. Рассматривается случай передачи усилия на стержень в виде трубки внутренним давлением жидкости или газа. Действие сжимающей силы осуществляется приложением осевой силы к пробке, вставленной в отверстие трубки без трения. В данном случае жидкость (или газ) сжимается давлением p , сжимающее усилие в сечениях трубки отсутствует.

Казалось бы, без внутреннего сжимающего усилия, без соответствующих напряжений сжатия и потенциальной энергии докритического сжатия прямолинейная трубка идеальной геометрической формы не должна терять устойчивость. Однако

анализ виртуального состояния трубки с жидкостью в условиях слабых возмущающих воздействий интенсивностью δq свидетельствует о том, что трубка получает сколь угодно малый макромасштабный прогиб $w(x)$ в детерминированном виде при нулевом значении приведенной конструктивной жесткости $C^* = \frac{\pi^2}{L^2} (\frac{\pi^2}{L^2} EI - pF^*)$ в

соотношении (2). Здесь EI – жесткость трубки на изгиб; F^* – площадь сечения трубки «в свету». Если трубка и пробка закреплены шарнирно, значение критической силы при условии $C^*=0$ равно эйлеровой

силе $T_{кр}^э = \frac{\pi^2}{L^2} EI$. Следует подчеркнуть,

что металлическая трубка с жидкостью, имеющая начальные несовершенства, теряет устойчивость при том же значении критической силы, но без динамического эффекта прощелкивания, то есть при потере устойчивости в малом.

Потеря устойчивости без прощелкивания рассматриваемой трубки с несовершенствами обусловлена слабыми возмущающими воздействиями окружающей среды в эффекте приведенной нулевой жесткости, отсутствии в нормальных сечениях трубки деформаций изгиба при нагружении в докритической стадии внутренним давлением жидкости. В эффекте нулевой жесткости при максимально допустимом значении усилия $N_0^* = pF^*$ виртуальный прогиб

$\delta v = \delta f \sin \frac{\pi x}{L}$ по основной форме изгиба

трансформируется в макромасштабный прогиб в детерминированном виде

$w = f \sin \frac{\pi x}{L}$ при отсутствии поперечного

механического импульса. Выражение для прогиба $w(x)$ используется в уравнении статического равновесия (3) слабоизогнутой трубки для определения критического значения осевой силы.

По результатам анализа следует вывод о том, что выпучивание сжатого прямолинейного стержня при потере устойчивости в малом обеспечивается реально суще-

ствующими слабыми воздействиями окружающей среды в эффекте нулевой жесткости. При предельно допустимом значении параметра N_0 сжатый стержень теряет приведенную конструктивную жесткость на изгиб согласно соотношению (2). С учетом соотношения (2) в эффекте нулевой жесткости виртуальный прогиб основной формы изгиба с неограниченно большим значением амплитуды трансформируется в действительный макромасштабный прогиб. Макромасштабный прогиб при потере устойчивости в малом отвечает смежной форме статического равновесия и характеризуется неопределенным значением стрелы прогиба, меньшим любого наперед заданного значения. Формирование макромасштабного прогиба в детерминированном виде происходит при предельно допустимом значении параметра N_0^* , равном критическому значению осевой силы $T_{кр}^Э$ в постановке Эйлера.

Как свидетельствуют эксперименты, выпучивание упругого стержня с несовершенствами происходит при критическом значении осевой силы, равном значению эйлеровой силы, но характеризуется эффектом прощелкивания. При внезапном выпучивании такого стержня при осевой силе, равной эйлеровой силе $T_{кр}^Э$, стрела прогиба определяется не сколь угодно малой, а конечной величиной с неопределенным значением – порядка линейного размера поперечного сечения стержня. Такой характер выпучивания с динамическим эффектом отвечает потере устойчивости в большом. Для определения критической силы в данной задаче не требуются конкретные данные об уровне и характере распределения по длине стержня малых начальных несовершенств, поскольку их влияние на значение критической нагрузки ограничивается в пределах естественного разброса экспериментальных данных. В дифференциальном уравнении устойчивости (3) влияние поперечного механического импульса при выпучивании стержня не рассматривается. **Для описания механизма возникновения поперечного механического импульса при внезапном выпучивании предельно сжатого стержня требуется физико-**

математическое представление. В механике деформируемых систем в решении задач устойчивости с динамическим эффектом соответствующая физико-математическая модель отсутствует.

Механизм возникновения поперечного импульса при внезапном выпучивании стержня с реально существующими несовершенствами

Анализируя принципиальные моменты при потере устойчивости в малом и большом, В.И. Феодосьев приходит к выводу: «Анализ возможных форм равновесия является только частью исследований устойчивости и не решает задачи полностью» [1, с. 263]. Как свидетельствуют эксперименты, при сжатии реальных стержней интенсивность поперечного механического импульса при внезапном выпучивании определяется уровнем начальных несовершенств, соответственно и энергией деформации изгиба, накопленной в докритической стадии нагружения стержня за счет несовершенств. В теории устойчивости и практике инженерных расчетов устойчивости стержня и прямолинейной стойки при осевом сжатии этот фактор не рассматривается. Однако при потере устойчивости гладких цилиндрических и сферических оболочек с реальными несовершенствами влиянием механического импульса определяется образование локальных вмятин при выпучивании оболочки с эффектом хлопка. В таком случае, как свидетельствуют экспериментальные данные, потеря устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии и сферической оболочки при внешнем давлении в реальных конструкциях происходит при значении критической нагрузки, в 2-3 раза меньшем значения верхней критической нагрузки. Верхняя критическая нагрузка определяется теоретически на основе концепции Эйлера [8] для оболочек правильной геометрической формы без начальных несовершенств. Поскольку реально существующие несовершенства имеют неконтролируемый характер, в инженерных расчетах используются эмпирические коэффициенты, обеспечивающие на основе опытных данных значений критических нагрузок, существенно меньших верхнего

значения. В статьях [9, 10] представлено теоретическое обоснование критической нагрузки при локальном выпучивании цилиндрической оболочки в условиях осевого сжатия и сферической оболочки при действии внешнего избыточного давления.

Согласно проведенному выше анализу внезапное выпучивание сжатого стержня обеспечивается в эффекте нулевой жесткости. Интенсивность внезапного выпучивания определяется уровнем начальных несовершенств, включая малые отклонения стержня от прямолинейной осевой линии. Заслуживает внимания замечание по этому поводу Н. Хоффа: «Даже если отклонения так малы, что не могут быть замерены непосредственно в лаборатории, их влияние отражается в теоретическом исследовании и при эксперименте» [11, стр. 22]. Как свидетельствуют данные измерений при экспериментах, в процессе нагружения упругого стержня с реальными несовершенствами наряду с деформациями равномерного сжатия тензорезисторные датчики регистрируют деформации изгиба с произвольными значениями в ограниченных пределах.

Деформациями изгиба при докритическом сжатии обеспечиваются достаточно малые прогибы $w(x)$ неконтролируемого характера. По мере увеличения осевой силы происходит развитие деформаций изгиба соответственно и прогибов согласно выражению $\varepsilon_u = h \frac{d^2 w}{dx^2}$. Параметром ε_u характеризуется деформация на наружной поверхности стержня в плоскости наименьшей жесткости на изгиб. (Положение материальных волокон на противоположных сторонах внешней поверхности стержня относительно нейтральной оси характеризуется параметром $\pm h$). Деформации изгиба на наружной поверхности реального стержня в условиях его сжатия осевой силой регистрировались в процессе статических испытаний двух опытных образцов (№ 1, 2). Испытания проводились на удлинённых стержневых образцах плоской формы длиной $L=450$ мм с прямоугольным поперечным сечением шириной $b=50$ мм и толщиной $2h=8,25$ мм. В качестве исходного материала для изготовления плоских образцов использовался лист стального про-

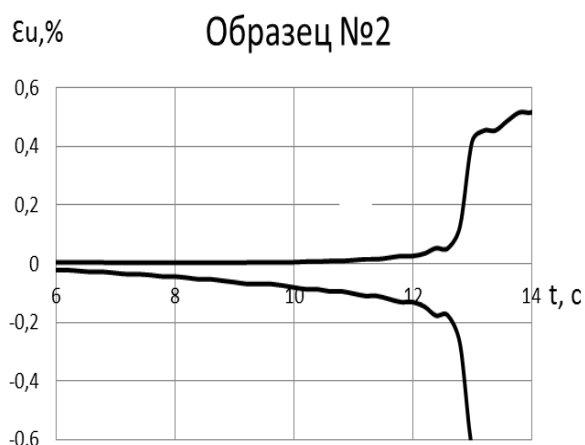
ката толщиной 8,25 мм. Материал листа – Ст. 20. Уровень реальных несовершенств определялся условиями технологического процесса при промышленном изготовлении стального листа. Видимых признаков отклонения от исходной прямолинейной формы на образцах не обнаружено.

Образец № 1 нагружался в условиях шарнирного закрепления торцов. Внезапная потеря устойчивости стержня произошла при значении осевой силы $T_{кр}=2570$ кг (расчетное значение эйлеровой силы $T_{кр}^э=2280$ кг). Нагружение образца № 2 проводилось при измененных граничных условиях: шарнирная опора на одном конце, на другом конце – свободная опора плоским торцом стержня на жесткое основание с гладкой поверхностью. Плоскость торца и соответствующая площадь контакта торца с основанием определялись линейными размерами поперечного сечения стержня. Внезапная потеря устойчивости стержня произошла при значении осевой силы $T_{кр}=4710$ кг (расчетное значение эйлеровой силы $T_{кр}^э=4560$ кг). Осевые напряжения сжатия в докритической стадии нагружения соответствовали упругим деформациям.

По результатам статических испытаний двух образцов на рисунке представлен характер изменения во времени деформаций изгиба ε_u стержня с реальными несовершенствами в процессе непрерывного сжатия.

Деформация изгиба с положительным значением отвечает растяжению материальных волокон на выпуклой стороне. Соответственно на вогнутой стороне деформация изгиба принимает отрицательное значение. Показания тензорезисторных датчиков на рисунке включают также деформацию равномерного сжатия. Поскольку в условиях эксперимента действие внешних поперечных сил отсутствовало, возникновение деформаций изгиба при осевом сжатии прямолинейного стержня обусловлено начальными несовершенствами на макромасштабном уровне. Как следует из рисунка, при значении осевой силы, достаточно близком к критическому значению (порядка $0,9 T_{кр}$), наблюдается интенсивное развитие деформаций изгиба. Когда значение $T/T_{кр}$ приближается к единице, коэффици-

ент приведенной конструктивной жесткости на изгиб становится незначительным согласно соотношению (2). В таких условиях ускоренное развитие деформаций изгиба по нелинейной зависимости во времени при непрерывном нагружении носит кратковременный характер.



Изменение во времени деформаций изгиба в процессе непрерывного нагружения стержневого образца осевой силой

Одновременно при интенсивном развитии деформаций изгиба в докритической стадии нагружения накапливается энергия изгиба согласно выражению

$$U_0 = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad \text{Макромасштабный}$$

прогиб $w(x)$ в данной формуле обусловлен деформациями изгиба ε_u согласно приведенному выше выражению. Поскольку деформации изгиба обусловлены малыми

начальными несовершенствами неконтролируемого характера, соответственно и прогибы стержня являются неопределенными в докритической стадии нагружения. Как следствие, энергия деформации изгиба U_0 также характеризуется неопределенным значением конечной величины.

В завершающей стадии интенсивного развития деформаций изгиба при максимальном значении осевой силы, равном критическому значению, соответственно и при нулевом значении приведенной конструктивной жесткости происходит внезапное выпучивание стержня с образованием макромасштабного прогиба в детерминированном виде. Внезапное выпучивание стержней в течение короткого промежутка времени (порядка 0,2 с) с *динамическим эффектом прощелкивания* отвечает вертикальным прямым на рисунке. В экспериментах британского исследователя Н. Хоффа [11] прощелкивание стержня происходило в течение приблизительно 0,01 с. По этому же поводу в монографии Н. Хоффа приводится замечание Кармана: «После того как достигается максимальная нагрузка, большинство стержней теряет устойчивость так внезапно, что манометры и тензометры получают сильные толчки» [11, с. 62]. Представляется очевидным, что такой спонтанный процесс за предельно короткое время обеспечивается действием поперечного механического импульса, возникновение которого обусловлено внутренними факторами в эффекте нулевой жесткости. В рассматриваемом случае потери устойчивости реального стержня с несовершенствами формирование механического импульса происходит за счет энергии деформации изгиба U_0 , накопленной в докритической стадии нагружения.

В эффекте нулевой жесткости предельно сжатого стержня происходит перестройка структур межкристаллических связей в конструкционном материале. Соответствующая перестройка проявляется в трансформации деформаций изгиба в недетерминированном виде в деформацию изгиба материальных волокон, обеспечивающую макромасштабный детерминированный прогиб стержня по основной форме изгиба.

Спонтанное возникновение макромасштабного прогиба $w^*(x)$ в детерминированном виде обеспечивается свойством «самовозбуждения» предельно сжатого стержня в условиях слабых возмущающих воздействий окружающей среды. Для шарнирно-опертого стержня прогиб характеризуется выражением $w^* = f^* \sin \frac{\pi x}{L}$.

В свою очередь, прогибом $w^*(x)$ согласно выражению $\frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 w^*}{dx^2} \right)^2 dx$ определяется

энергия деформации изгиба в состоянии статического равновесия изогнутого стержня в заключительной стадии внезапного выпучивания с динамическим эффектом. С учетом приведенного выражения для макромасштабного прогиба $w^*(x)$ в детерминированном виде данную энергию логично именовать *формообразующей* $\mathcal{E}_\Phi = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} (f^*)^2$. При этом значение стрелы прогиба f^* определяется конечной величиной.

Проведенный анализ свидетельствует о том, что энергия деформации, равная формообразующей энергии, необходима для того, чтобы прогиб стержня по основной форме изгиба на виртуальном уровне реализовался в действительный прогиб, обеспечивающий состояние статического равновесия изогнутого стержня с конечным значением стрелы прогиба f^* . В качестве источника для формообразующей энергии рассматривается энергия изгиба U_0 согласно закону сохранения энергии. Предварительно в начальный момент внезапного выпучивания стержня тот же источник энергии используется для образования поперечного механического импульса в эффекте нулевой жесткости. В данном процессе подобно направленному взрыву происходит освобождение энергии изгиба U_0 за предельно короткий промежуток времени. При этом амплитудное значение интенсивности механического импульса определяется формулой $i^* = 2 \sqrt{\frac{mU_0}{L}}$. Распределение импульса i по длине стержня с погонной

массой m адекватно основной форме изгиба $w^*(x)$ и определяется соотношением $i = i^* \sin \frac{\pi x}{L}$. Согласно приведенной формуле с уменьшением длины стержня интенсивность импульса увеличивается, что подтверждается экспериментами.

Несущая способность стержня с несмежной формой статического равновесия

В завершающей стадии внезапного выпучивания стержня с несовершенствами прогиб $w^*(x)$ рассматривается в качестве *начальной погиби* изогнутого стержня в условиях его нагружения осевой силой T . В таком случае используется неоднородное дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба

$$EI \frac{d^2 w_1}{dx^2} + T w_1 = -T w^*(x). \quad (4)$$

Функцией $w^* = f^* \sin \frac{\pi x}{L}$ в уравнении (4)

обозначается начальная погибь шарнирно-закрепленного стержня. Соответствующая стрела f^* начальной погиби рассматривается как заданная. Функцией $w_1(x)$ характеризуется прогиб качественно нового структурного образования в закритической стадии нагружения осевой силой T . В рассматриваемом случае учитывается условие, при котором стержень с начальным прогибом $w^*(x)$ и соответствующей формообразующей энергией \mathcal{E}_Φ обеспечивает статическое равновесие с новой формой изгиба $w_1(x)$. Отличительной особенностью нового структурного образования является продольно-поперечный изгиб при действии осевой силы T согласно (4). Определяющим фактором в соответствующем процессе деформирования является отличный от нуля коэффициент жесткости на изгиб [8]

$$C_u = \frac{\pi^2}{L^2} f^* EI \quad \text{в соотношении} \quad T = C_u f_1.$$

Параметром f_1 характеризуется амплитуда прогиба $w_1(x)$ при продольно-поперечном изгибе стержня с начальным прогибом $w^*(x)$ по одной полуволне синуса. Следует заметить, что в докритической стадии нагружения прямолинейного стержня (без

начальной погиби) деформация осевого сжатия обеспечивается также отличным от нуля коэффициентом жесткости на сжатие

$C_0 = \frac{EF}{L}$ в соотношении $T = C_0 u$. Параметром u характеризуется осевое перемещение торца стержня при постоянном коэффициенте линейной жесткости $C_0 \neq 0$.

При шарнирном закреплении концов стержня решением дифференциального уравнения (4) определяется дополнительный прогиб w_1 по одной полуколе синуса и полная стрела прогиба $f = f^* + f_1$ согласно формуле [8]

$$f = \frac{f^*}{1 - \frac{T}{T_{кр}^{\text{э}}}}. \quad (5)$$

Как следует из приведенного выражения, при значении осевой силы $T = T_{кр}^{\text{э}}$ полная стрела прогиба f при любом значении параметра f^* начальной погиби принимает бесконечное значение, что свидетельствует о потере несущей способности стержня в закритической стадии нагружения. Полученный результат служит основанием для вывода о том, что **критическое значение осевой силы, равное эйлеровой силе, не зависит от деформаций изгиба в докритической стадии нагружения упругого стержня с несовершенствами.**

Результаты проведенного анализа служат теоретическим обоснованием потери устойчивости в большом реальном стержне с образованием конечного прогиба с неопределенным значением стрелы прогиба. Возникновение конечного прогиба в динамическом эффекте нулевой жесткости обусловлено энергией деформации изгиба, накопленной за счет несовершенств при сжатии стержня. Математическое модельное представление явления потери устойчивости прямолинейной стойки (стержня) с несовершенствами получило экспериментальное подтверждение при нагружении макромасштабной балки осевой сжимающей силой. С этой целью использовалась удлиненная стальная балка натуральных размеров, выступающая в качестве несущего силового элемента в составе пространственной конструкции. Балка длиной 4730 мм

изготовлена из конструкционного материала марки Ст. 3. Сечение балки полое, коробчатого типа, характеризуется размером 120×140 мм по периметру сечения с площадью 26,6 см². Начальные непредусмотренные несовершенства балки включают неоднородности механических свойств материала и малые отклонения от прямолинейной оси, обусловленные технологическим процессом изготовления. Конструктивное выполнение заделки торцов в условиях статического нагружения балки отвечало условию, близкому к шарнирной опоре. При осевом сжатии силой $T_{кр} = 42000$ кг балка потеряла устойчивость с внезапным выпучиванием. Критическое значение осевой силы по формуле Эйлера для рассматриваемой балки $T_{кр}^{\text{э}} = 38800$ кг. Отличие расчетного значения критической нагрузки от экспериментального значения составляет 10,8%. Для балки натуральных размеров такое отличие согласуется с естественным разбросом экспериментальных данных.

Выводы

Внезапное выпучивание при потере устойчивости сжатого стержня, стойки с реально существующими несовершенствами обусловлено действием поперечного механического импульса в эффекте нулевой жесткости. Выпучивание с динамическим эффектом прощелкивания характерно для потери устойчивости в большом. Интенсивность механического импульса и соответствующее значение стрелы прогиба определяются энергией изгиба, накопленной в докритической стадии нагружения за счет непредусмотренных несовершенств, и потому характеризуются неопределенными значениями в ограниченных пределах.

Выпучивание центрально-сжатого прямолинейного стержня без начальных несовершенств обусловлено слабыми возмущающими воздействиями окружающей среды при нулевом значении приведенной конструктивной жесткости на изгиб и характеризуется потерей устойчивости в малом с неопределенным значением амплитуды прогиба, меньшим любой наперед заданной конечной величины.

Список использованной литературы

1. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 522 с.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
5. Конюхов С. Н., Муляр Ю. М., Приварников Ю. К. Исследование влияния малых возмущающих воздействий на устойчивость оболочки // Прикладная механика. – 1996. – Вып. 32, № 9. – С. 59–65.
6. Ларионов И. Ф., Муляр Ю. М., Петушенко Ю. Г. О физическом обосновании спонтанного изменения исходной формы предельно сжатых отсеков ракет-носителей // Космонавтика и ракетостроение. – Калининград: ЦНИИмаш, 2001. – Вып. 24. – С. 129–136.
7. Хакен Г. Синергетика: Иерархии неустойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 423 с.
8. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
9. Ларионов И. Ф., Муляр Ю. М., Приварников Ю. К. Исследование локального выпучивания оболочечных конструкций при потере устойчивости их отсеков // Космонавтика и ракетостроение. – Калининград: ЦНИИмаш, 1998. – Вып. 13 – С. 92–98.
10. Муляр Ю. М., Перлик В. И. К вопросу прогнозирования разрушения предельно сжатых отсеков ракет-носителей // Космическая техника. Ракетное вооружение: Сб. науч.-техн. ст. – Днепрпетровск: ГП "КБ "Южное", 2010. – Вып. 2. – С. 28–39.
11. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – 154 с.

Статья поступила 10.11.2016