

УДК 539.3

П. Г. Капля

## К ВОПРОСУ О КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГЛАДКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

*На основе уточненных уравнений равновесия и при динамическом подходе к их решению рассмотрен вопрос устойчивости цилиндрических оболочек в рамках линейной теории Доннела-Власова. Получены новые теоретические результаты определения критических напряжений, близкие по значениям к экспериментальным данным.*

*Показана зависимость критических напряжений от динамических характеристик конкретной оболочки. Для каждого конкретного случая представлены параметры волнообразования оболочки на момент потери устойчивости.*

*На базі уточнених рівнянь рівноваги та за динамічного підходу до їх розв'язання розглянуто питання стійкості циліндричних оболонок у рамках лінійної теорії Доннела-Власова. Отримано нові теоретичні результати визначення критичних напруг, які близькі за значенням до експериментальних даних.*

*Показано залежність критичних напруг від динамічних характеристик конкретної оболонки. Для кожного конкретного випадку подано параметри хвилеутворення оболонки на момент втрати рівноваги.*

*This work deals with the problem of cylindrical shell stability within Donnel-Vlasov linear theory based on updated equilibrium equations and dynamic approach to their solution. The new theoretical results of critical stress determination that are well agreed with experimental data are presented here.*

*The plot of critical stress as a function of dynamic behavior of specific shell is shown here. The wave generation parameters for the moment of equilibrium loss for each specific case are also presented in this work.*

**Введение.** Вопрос о критических напряжениях продольной устойчивости цилиндрических оболочек, несмотря на огромное число работ, посвященных этому вопросу, по-прежнему не имеет удовлетворительного решения. Это объясняется, прежде всего, значительным разбросом экспериментальных данных и очень высоким теоретическим значением коэффициента  $\hat{p} = 0,605$ , достичь которого не удается даже тщательно поставленными экспериментами.

В настоящей работе предпринят очередной шаг по объяснению этого феномена.

В результате уточнения основных уравнений равновесия и принятия динамического подхода к решению этой задачи получены новые теоретические значения критических напряжений для шарнирно-опертых оболочек, которые дали хорошее совпадение с экспериментом даже в рамках линейной теории. На качественном уровне удалось показать, что имеющий место сильный разброс критических напряжений продольной устойчивости в основном обусловлен не начальными неправильностями, а динамическими характеристиками конкретной оболочки. Чем выше коэффициент динамичности (добротности) системы, тем

она более чувствительна к внешнему воздействию и тем ниже ее коэффициент устойчивости.

**Система уравнений.** Обратимся к упрощенной системе уравнений равновесия гладкой цилиндрической оболочки, нагруженной осевыми сжимающими силами  $P_x$ , в ее общепринятом виде при  $q_x = q_y = 0$  [1].

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{N_2}{R} + q_z = 0;$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H_{12}}{\partial y} - Q_1 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H_{21}}{\partial x} - Q_2 = 0;$$

$$T_{12} = T_{21}; \quad H_{12} = H_{21}.$$

Рассмотрим первые два уравнения. Эти два уравнения представляют собой систему самоуравновешенных внутренних сил и по своей сути являются уравнениями свобод-

ных изгибных колебаний, а не уравнениями равновесия оболочки, нагруженной тангенциальными гранично приложенными сжимающими силами  $P_x$ , далее  $P_0$ .

Чтобы понять, в чем проблема, рассмотрим физическую сторону процесса нагружения такой оболочки. Известно, что силами сопротивления любого материала являются упругие силы кулоновского происхождения, для которых характерно наличие зон неустойчивости при сжатии материала. Поэтому в процессе нагружения гибкой оболочки ее материал на начальном этапе нагружения будет сжиматься в осевом направлении и расширяться в поперечном. Напряжения в любой точке оболочки будут постоянными, и проекция сжимающих сил  $P_0$  на ось  $x$  будет равной нулю. Но с ростом силы  $P_0$  наступает момент, когда дальнейшее сопротивление оболочки силе  $P_0$  путем только сжатия материала становится невозможным и более энергоемким, чем сопротивление частичным изменением формы поверхности. Появляется смежная форма равновесия, при которой происходит расчленение энергии сжатия на две составляющие:

- энергию изгиба деформированной поверхности моментом  $M_x = P_0 w$ , где  $w$  – прогиб обшивки в радиальном направлении;
- энергию сжатия деформированной поверхности обшивки, но не силой  $P_0$ , а силой  $P_1 = f(P_0, x, \dots, y) \cos \alpha$ , где  $P_1$  не постоянная, а переменная составляющая в таком же плане, как и внутренние силовые факторы.

Для шарнирно-опертой оболочки, которая и будет рассмотрена ниже, сила  $P_1$  в первом приближении может быть представлена в следующем виде:

$$P_1 = P_0 \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \cos \alpha. \quad (2)$$

И первое уравнение системы (1) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} - h \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Это прямо следует из рис. 1 при малых углах  $\alpha$  и пренебрежении членами более высокого порядка малости по сравнению с приведенными.

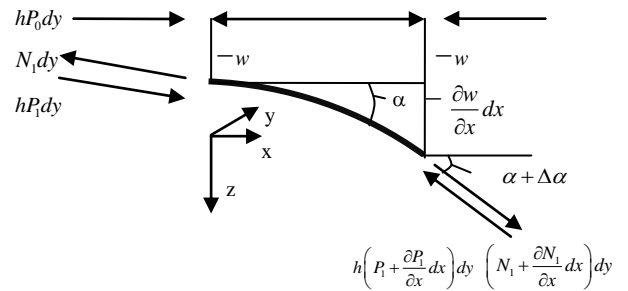


Рис. 1

Из рис. 1 также следует, что сила  $P_1$  (2) помимо составляющей на ось  $X$  дает составляющую на ось  $Z$ :

$$\begin{aligned} \Delta P_{1z} &= hP_1 dy \sin \alpha - h \left( P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} dx \right) dy \sin (\alpha + \Delta \alpha) = \\ &= -P_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме этого, составляющую на ось  $Z$  в плоскости  $Z, X$  дают и силы  $N_1$  и  $T_{12}$ :

$$\Delta N_{1z} = N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy; \Delta T_{12z} = T_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy, \quad (5)$$

а в плоскости  $Y, Z$  – силы  $N_2, T_{21}$ :

$$\Delta N_{2z} = N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy; \Delta T_{21z} = T_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy. \quad (6)$$

Третье уравнение системы (1) после подстановки (4)–(6) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{N_2}{R} - P_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q_z = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $q_z$  – уже не «фиктивная», а инерционная нагрузка,

$$q_z = -\frac{\rho h \partial^2 \omega}{g \partial t^2}.$$

Что касается тангенциальных гранично приложенных сил  $P_0$  (рис. 1), то их составляющие на осях  $X, Y, Z$  равны нулю. В то же время силы  $P_0$  дают составляющую момента  $\Delta M_1$ , и четвертое уравнение системы (1) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} - Q_1 - hP_0 \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Пятое и шестое уравнения системы (1) остаются без изменений. Вернемся к

$dx$   $hP_0 dy$

уравнению (7). Анализируя его, находим, что оно является уравнением вынужденных изгибных колебаний оболочки, где внешней возмущающей силой является

$$\Delta P_{1z} = -hP_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \text{ Сила } \Delta P_{1z} \text{ является един-$$

ственной составляющей внешней силы  $P_0$ , которая действует в радиальном направлении, связана с параметрами волнообразования  $m, n$  и вызывает наблюдаемые в практике изгибные колебания оболочки перед потерей устойчивости. И совершенно прав В. В. Болотин [2], утверждая, что процесс потери устойчивости – это не статическая, а динамическая задача.

Теория демпфирования на данный момент разработана слабо. Истинные значения динамичности (добротности) системы удастся получить только экспериментальным путем. Поэтому для учета демпфирующих свойств оболочки воспользуемся подходом [3, 4] и введем параметр добротности  $Q$  путем замены значения  $P_{1z}$  на

$$\Delta P_{1z} = -hQP_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где  $Q$  – коэффициент добротности оболочки. Для реальных упругих систем  $Q$  равно 3–60. При этом  $Q$ , равное 3–7, соответствует слабоупругим (упруговязким) системам,  $Q > 7$  – упругим системам,  $1 \leq Q < 3$  – неупругим системам. Следует отметить, что в некоторых областях машиностроения конструкции с  $Q > 7$  к эксплуатации не допускаются.

Определяя теперь из (8) и пятого уравнения системы (1)  $Q_1$  и  $Q_2$  и подставляя их в (7), с учетом (9) приходим к окончательному виду системы уравнений динамического равновесия для определения критических напряжений потери устойчивости цилиндрических оболочек.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{h\Delta P_1}{\partial x} = 0; 2. \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - hP_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - hQP_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \frac{N_2}{R} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\rho h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Системе (10) соответствует следующая система дифференциальных уравнений в перемещениях в рамках линейной теории оболочек Доннела-Власова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \mu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ \frac{h^2}{12} \nabla^4 - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \mu \frac{du}{dx} \right) + (P_1 Q + P_0) \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \mu \frac{du}{dx} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\ - (1-\mu) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } \nabla^4 = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$$

**Устойчивость гладких шарнирно-опертых цилиндрических оболочек.** Рассмотрим гладкую цилиндрическую оболочку с шарнирным опиранием на концах, нагруженную тангенциальной осевой сжимающей силой  $P_0$ . Решение задачи будем искать в два приближения.

**Первое приближение.** Для описания перемещений  $u, v, w$  в первом приближении примем классические выражения, удовлетворяющие граничным условиям шарнирного опирания

$$\begin{aligned} U = A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \cos \omega_j t; \\ V = B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R} \cos \omega_j t; \\ W = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \cos \omega_j t. \end{aligned} \quad (12)$$

Для силы  $P_1$  при малых углах  $\alpha$  примем выражение

$$P_1 = P_0 \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \cos \omega_j t. \quad (13)$$

Динамические свойства конструкции в первом приближении учитывать не будем. Примем  $Q=1$ . При подстановке (12), (13) в систему (11) ее второе уравнение удовлетворяется тождественно, а первое и третье

уравнения дают некоторую функциональную ошибку. Обычно используемые для выделения этой ошибки методы Бубнова-Галеркина, Ритца и другие в данном случае не подходят. Эти методы предусматривают минимизацию функционала ошибки на классе задаваемых функций  $u, v, w$ . Методы тем точнее, чем ближе класс функций, определяющих ошибку, к классу задаваемых.

В первое и третье уравнения системы (11) входят дополнительные члены, дающие несимметричные по отношению к (12), (13) остатки, в результате чего интеграл произведения таких функций на поверхности существования ошибки  $F_j$  дает нулевые значения и эти члены выпадают из рассмотрения.

Поэтому применим к решению системы (11) простой метод взвешенных среднеквадратических ошибок, краткая суть которого изложена ниже.

Если функции (12), (13) не удовлетворяют систему (11), то после их подстановки в (11) для каждого из уравнений получаем некоторую ошибку  $\xi_j$ , которая складывается из ряда ошибок так, что

$$\xi_j = \sum_{i=1}^N B_{ji} \varphi_{ji},$$

где  $B_{ji}, \varphi_{ji}$  – результат преобразования (12), (13) операторами  $j$ -того уравнения системы (11). При этом  $B_{ji}$  – постоянная, а  $\varphi_{ji}$  – переменная составляющая  $i$ -той ошибки. Считая каждую  $i$ -тую ошибку независимой, возведем в квадрат их переменные составляющие. В результате получаем сумму взвешенных квадратических ошибок. Решение будем считать найденным, если сумма взвешенных среднеквадратических ошибок на поверхности их существования равна нулю для каждого  $\xi_j$ , т.е. для каждого из уравнений. Это приводит к выполнению условия

$$\xi_j^2 = \iint_{F_j} (\sum B_{ji} \varphi_{ji}^2) dF_j = 0. \quad (14)$$

Подставляя (12), (13) в (11), возведя в квадрат переменные составляющие каждой из ошибок и проинтегрировав выражения для  $\xi_j^2$  в соответствии с (14), получаем следующую систему алгебраических уравне-

ний для определения  $\omega_{mn}^2, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}$  при задаваемом значении  $P_0, m, n$ .

$$A_{mn} \left( \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 \right) + \frac{1+\mu}{2} B_{mn} \lambda n + C_{mn} \mu \lambda - P_0 \lambda R \varphi = 0;$$

$$A_{mn} \frac{1+\mu}{2} \lambda n + B_{mn} \left( n^2 + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 \right) + C_{mn} n = 0;$$

$$\begin{aligned} & C_{mn} \delta^2 (\lambda^2 + n^2)^2 - (-B_{mn} n - C_{mn} - A_{mn} \mu \lambda) + \\ & + \frac{1}{R} (-A_{mn} \lambda + \mu (-B_{mn} n - C_{mn})) \lambda^2 \frac{9}{16} C_{mn} + \\ & + \frac{1}{R} (-B_{mn} n - C_{mn} - A_{mn} \mu \lambda) n^2 \frac{9}{16} C_{mn} + \\ & + \frac{1-\mu}{R} (-A_{mn} n - B_{mn} \lambda) \lambda n \frac{9}{16} C_{mn} - \\ & - P_0 \varphi \lambda^2 \left( 1 + \frac{3}{16} \right) C_{mn} - \frac{\rho}{g} R^2 \varphi \omega_{mn}^2 C_{mn} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\varphi = \frac{1-\mu^2}{E}$ ;  $\delta^2 = \frac{h^2}{12R^2}$ ;  $\mu$  – коэффициент

Пуассона;  $E$  – модуль упругости;  $L$  – длина;  $R$  – радиус оболочки;  $h$  – толщина обшивки оболочки;  $\rho$  – удельный вес материала оболочки;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\omega_{mn}^2$  – квадрат собственной частоты изгибных колебаний оболочки;  $n$  – число волн в поперечном направлении;  $m$  – число волн в продольном направлении.

Выражая из первых двух уравнений системы (15)  $A_{mn}, B_{mn}$  через  $C_{mn}$  и  $P_0$  и подставляя их в уравнение (3), получаем следующее уравнение для определения  $P_{0sp}$ :

$$\begin{aligned} & \delta^2 (\lambda^2 + n^2)^2 + \frac{\lambda^4 (1-\mu^2)}{(\lambda^2 + n^2)^2} - \frac{P_0 R \varphi (n^2 - \mu \lambda^2) \lambda^2}{C_{mn} (\lambda^2 + n^2)^2} - \\ & - 1,75 P_0 \varphi \lambda^2 - \frac{\rho}{g} R^2 \varphi \omega_{mn}^2 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) кроме неизвестной частоты  $\omega_{mn}^2$  при задаваемых  $P_0, m, n$  содержит неизвестную  $C_{mn}$  и поэтому должно быть дополнено еще одним уравнением.

Как показывает практика, потеря устойчивости оболочек происходит при положительном суммарном значении прогиба  $W$  [1]. Откуда следует, что как в процессе нагружения оболочки силой  $P_0$ , так и при потере устойчивости,  $\xi_2$  равно 0 или очень близко к нулю. Используя эту гипотезу, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \approx 0 \text{ или } B_{mn} = -\frac{C_{mn}}{n}. \quad (17)$$

Принятие этой гипотезы дает не только недостающее уравнение, но и значительно упрощает системы (11), (15), выражения для коэффициентов  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$ , уравнение (16), и они принимают следующий вид:

- Система (15)

$$\begin{aligned} A_{mn} (2\lambda^2 + (1-\mu)n^2) + (1-\mu)B_{mn}\lambda n - \\ - 2P_0 R \varphi \lambda = 0; \\ A_{mn} (1+\mu)n + B_{mn} (1-\mu)\lambda = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C_{mn} \delta^2 (\lambda^2 + n^2)^2 + A_{mn} \mu \lambda - A_{mn} \frac{1}{R} \lambda^3 \frac{9}{16} C_{mn} - \\ - A_{mn} \frac{1}{R} \mu \lambda n^2 \frac{9}{16} C_{mn} + \frac{1-\mu}{R} (-A_{mn} n - B_{mn} \lambda) \lambda n \frac{9}{16} C_{mn} - \\ - P_0 \varphi \lambda^2 \cdot 1,187 C_{mn} - \frac{\rho}{g} R^2 \varphi \omega_{mn}^2 C_{mn} = 0. \end{aligned}$$

- Уравнение (16)

$$\begin{aligned} \delta^2 (\lambda^2 + n^2)^2 + \frac{\mu(1-\mu)\lambda^2}{n^2(1+\mu)} - \\ - 1,75 P_0 \varphi \lambda^2 - \frac{\rho}{g} R^2 \varphi \omega_{mn}^2 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

- Коэффициенты  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$

$$\begin{aligned} A_{mn} = \frac{C_{mn}(1-\mu)}{n^2(1+\mu)}; \quad B_{mn} = -C_{mn}/n; \\ C_{mn} = \frac{P_0 R \varphi n^2 (1+\mu)}{(1-\mu)(\lambda^2 - \mu n^2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Проанализируем уравнение (19). В физике хорошо известен принцип Бора, который гласит, что из общего неминусово должно следовать частное. Если в уравнении (19) принять  $P_0=0$ , то оно из уравнения вынужденных колебаний должно преобразоваться в уравнение свободных изгибных колебаний цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned} \delta^2 (\lambda^2 + n^2)^2 + \frac{(1-\mu^2)\lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2} - \\ - \frac{\rho}{g} R^2 \varphi \omega_{mn}^2 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Однако уравнение (19) не преобразуется в уравнение (21).

$$\frac{\lambda^4 (1-\mu^2)}{(\lambda^2 + n^2)^2} \neq \frac{\mu(1-\mu)\lambda^2}{(1+\mu)n^2}. \quad (22)$$

Чтобы понять причину, обратимся к первому и второму уравнениям системы (18) при  $P_0=0$ . Подставив в эти уравнения  $B_{mn} = -C_{mn}/n$ , приходим к двум различным выражениям для

$$A_{mn_1} = \frac{C_{mn} \lambda (1-\mu)}{2\lambda^2 + (1-\mu)n^2}; \quad A_{mn_2} = \frac{C_{mn} (1-\mu) \lambda}{(1+\mu)n^2}.$$

Приравняв полученные значения, находим, что (22) удовлетворяется при

$$\mu = \bar{\mu} = \frac{\lambda^2}{n^2}. \quad (23)$$

Это новый фактор для задачи устойчивости гибких оболочек. Он указывает на то, что потеря устойчивости гибких оболочек при ограниченной растяжимости срединной поверхности в радиальном направлении, что следует из принятия гипотезы  $\xi_0 = 0$  (17), должна происходить по формам с параметрами волнообразования  $m$ ,  $n$ , равными или близкими условию (23). Зависимость  $\bar{\mu}$  от параметров волнообразования  $m$ ,  $n$  на данный момент не известна. На практике во всех задачах по динамике конструкций в качестве  $\bar{\mu}$  применяется коэффициент  $\mu$ . И это не противоречит экспериментальным данным [5]. Коэффициент  $\mu$  для реальных материалов стабилен и находится в пределах  $0 < \mu < 0,5$  [6]. Для стали  $\mu = 0,3$ , для алюминиевых сплавов  $\mu = 0,32$ . Если воспользоваться этими данными, то получим, что  $0 < \lambda^2/n^2 < 0,5$ . Для оболочек из алюминиевых сплавов, которые будут рассмотрены дальше, имеем  $\lambda^2/n^2 = 0,32$ . Этому условию соответствуют вмятины ромбовидной формы с параметрами  $l_x/l_y \leq 1,77$ , что и наблюдается при экспериментальных исследованиях [1].

Подставляя (23) в (19), приходим к окончательному варианту уравнения для определения  $P_{0\varphi}$  для всех типов упругих оболочек без учета демпфирования.

$$\delta^2 (\lambda^2 + n^2)^2 + \frac{(1 - \bar{\mu}^2) \lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2} - \quad (24)$$

$$-1,75P_0\varphi\lambda^2 - \frac{\rho}{g}R^2\varphi\omega_{mm}^2 = 0.$$

При динамическом подходе к решению задачи устойчивости фактом потери устойчивости является первое достижение нулевого значения частоты одной из форм колебаний оболочки под воздействием силы  $P_{0m}$ . Заменяя в (24)  $n^2$  на  $\lambda^2$  по (23) и принимая, что  $\omega_{mm}^2 = 0$ , получаем следующее выражение для определения  $P_{0кр}$  как функции  $\lambda^2$ :

$$P_{0кр} = \frac{\left( \frac{E\delta^2}{(1-\mu^2)} \lambda^4 \left( \frac{1+\mu}{\mu} \right)^2 + E / \left( \frac{1+\mu}{\mu} \right)^2 \right)}{1,75\lambda^2}. \quad (25)$$

Находя минимум  $P_{0кр}$  из условия  $\frac{\partial P_{0кр}}{\partial \lambda^2} = 0$ , получаем

$$\lambda^2 = \frac{R}{h} \frac{\mu^2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{(1+\mu)^2}. \quad (26)$$

В табл. 1 приведены результаты расчетов критических напряжений и параметров волнообразований  $m, n$  для серии оболочек (табл. 2) по (25), (26), формуле Лоренца-Тимошенко ( $P^* = 0,605 \frac{Eh}{R}$ ), а также результаты экспериментальных исследований, заимствованные из [1].

Как следует из приведенных материалов, для всех видов оболочек получено новое значение  $\hat{p}$ , равное 0,35, вместо  $\hat{p} = 0,605$ .

Таблица 1

Номер оболочки	$R/h$	$P_{теор},$ кг/см <sup>2</sup>	$P_{эксп},$ кг/см <sup>2</sup>	$P^*,$ кг/см <sup>2</sup>	$\hat{p}_{теор}$	$\hat{p}_{эксп}$	$m$	$n$
1	214	1107	1182	1904	0,349	0,372	41	11
2	214	1108	1182	1904	0,349	0,372	20	11
3	214	1115	1182	1904	0,350	0,372	11	12
4	320	741	810	1275	0,349	0,381	13	14
5	500	474	498	816	0,348	0,366	16	18
6	1000	238	224	408	0,350	0,330	23	25
7	2000	119	71,4	204	0,350	0,210	32	35
8	3000	79	29,9	136	0,348	0,132	39	43

Таблица 2

Параметры оболочки	Значения параметров оболочек							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$R, \text{ см}$	150	150	150	16	25	50	100	150
$h, \text{ см}$	0,7	0,7	0,7	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$L, \text{ см}$	3000	1500	750	83	125	250	500	750
$R/h$	214	214	214	320	500	1000	2000	3000
$L/R$	20	10	5	5	5	5	5	5
$E, \text{ кг/см}^2$	$6,8 \cdot 10^5$							
$\rho, \text{ кг/см}^3$	0,0028							

Однако полученные в рамках первого приближения новые теоретические значения критических напряжений имеют достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными только по верхней гра-

нице и только для оболочек с параметрами  $R/h < 1000$ .

Для оболочек с  $R/h > 1000$  расхождение теории с экспериментом хотя и сократилось примерно в 1,8 раза, но по-прежнему оста-

лось значительным. Нет решения по нижней границе критических напряжений.

Поэтому несколько отойдем от классического пути.

**Второе приближение.** Введем в рассмотрение коэффициент добротности оболочки  $Q$  и, сохраняя гипотезу  $\xi_2 = 0$ , примем для аппроксимации прогибов оболочки  $U, V, W$  и  $P_1$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} U &= A \left( \cos \frac{\pi x}{L} + \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \sin \frac{ny}{R} \cos \omega_j t; \\ V &= B \left( \sin \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \frac{ny}{R} \cos \omega_j t; \\ W &= C \left( \sin \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \sin \frac{ny}{R} \cos \omega_j t; \\ P_1 &= P_0 \left( \cos \frac{\pi x}{L} + \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \sin \frac{ny}{R} \cos \omega_j t. \end{aligned} \quad (27)$$

Выражение (27) более точно описывает колебания оболочки в условиях  $\xi_2=0$ , поскольку при положительном коэффициенте  $C$  имеем гарантированный положительный прогиб оболочки. Кроме этого, наличие в (27) функции прогиба с фиксированным параметром  $m = 1$  позволяет усилить несущую способность оболочки.

Подставляя (27) в (11) с учетом (17) и следуя тем же путем, что и раньше, но пренебрегая на этапе интегрирования произведениями ортогональных функций, приходим к следующему уравнению для определения  $P_{0_{кр}}$ ,  $\omega_{mn}^2$  при известных  $m, n, Q$ .

$$\begin{aligned} D \left[ (\bar{\lambda}^2 + n^2)^2 + (\lambda^2 + n^2)^2 \right] + \frac{(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2) \lambda^2 E}{(\lambda^2 + n^2)^2} - \\ - \frac{9}{16} \frac{2P_0(\bar{\lambda} + \lambda)(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2)((\bar{\lambda}^3 + \lambda^3) - \mu n^2(\bar{\lambda} + \lambda))}{2(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2) + n^2((\bar{\lambda}^2 + \lambda^2)(1 - 3\mu) - 2\bar{\lambda}\lambda(1 + \mu))} - \\ - P_0(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2) - P_0(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2) \cdot 0,187Q - 2 \frac{\rho}{g} R^2 \omega_{mn}^2 = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{где } \bar{\lambda} = \frac{\pi R}{L} = \frac{\lambda}{m}; \quad D = \frac{E\delta^2}{(1 - \mu^2)}.$$

Анализируя третий член уравнения (28), который представляет собой суммарную проекцию внутренних силовых факторов на ось  $Z$ , находим, что его значение мало по сравнению с  $P_0(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2)$  и этим членом можно пренебречь.

Этот вывод, который не был получен в первом приближении, прежде всего указывает на то, что принятые во втором приближении функции для  $U, V, W$  близки к истине.

А во-вторых, факт равенства нулю суммарной проекции внутренних силовых факторов в зоне вмятины, о чем впервые заявил С. П. Тимошенко в 1908 г. [7], для задач продольной устойчивости оболочек следует считать фундаментальным.

И уравнение (28) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} D \left[ (\bar{\lambda}^2 + n^2)^2 + (\lambda^2 + n^2)^2 \right] + \frac{(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2) \lambda^2 E}{(\lambda^2 + n^2)^2} - \\ - P_0(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2) - 0,187QP_0(\bar{\lambda}^2 + \lambda^2) - \\ - 2 \frac{\rho}{g} R^2 \omega_{mn}^2 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Принимая в (29)  $\omega_{mn}^2 = 0$ , пренебрегая  $\bar{\lambda}^2$ , что допустимо для подавляющего числа задач, и заменяя  $n^2$  через  $\lambda^2$ , по (23) приходим к следующему уравнению для  $P_{0_{кр}}$  как функции  $\lambda^2$ :

$$P_{0_{кр}} = \frac{D\lambda^4 \left[ \frac{1}{\mu^2} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2 \right] + E \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2}{\lambda^2(1 + 0,187Q)}. \quad (30)$$

Находя минимум  $P_{0_{кр}}$  из условия  $\frac{\partial P_{0_{кр}}}{\partial \lambda^2} = 0$ , получаем

$$\lambda^2 = \frac{R}{h} \frac{\mu^2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{(1+\mu)\sqrt{1+(1+\mu)^2}}. \quad (31)$$

Что касается амплитуд изгибных и других форм колебаний оболочки на момент потери устойчивости, то они могут быть примерно определены как сумма статической и динамической составляющих на основании следующих выражений:

$$A_{mm} = \frac{C\lambda^2(1-\mu)}{n^2(\lambda+\lambda)(1+\mu)}; B_{mm} = -\frac{C_{mm}}{n}; \quad (32)$$

$$C_{mm} = \frac{2P_0R(0,813+0,187Q)(\lambda+\lambda)(1+\mu)^2n^2}{E(2\lambda^4+n^2(\lambda^2(1-3\mu)-2\lambda\lambda(1+\mu)))}$$

В табл. 3 представлены результаты расчета критических напряжений, параметров волнообразования  $m, n, C_{mm}$  и коэффициента  $\hat{p}_2$  для оболочек (табл. 2) на момент потери устойчивости, выполненные по формулам (30)–(32) второго приближения. Расчеты для каждой из оболочек проводились при  $Q = 3,3; 5; 7; 10; 20; 50$ . Коэффициент  $\hat{p}_2$  определен на основании формулы Лоренца-Тимошенко  $P_{0,cr} = \hat{p} Eh/R$ .

Таблица 3

№ об-ки	R/h	Q	$P_{0,cr}$ , кг/см <sup>2</sup>	$\hat{p}_2$	m	n	$C_{mm}$ , см
1	214	3,3	1501	0,472	37	10	2,7
		5	1254	0,395			2,76
		7	1051	0,331			2,81
		10	846	0,266			2,86
		20	512	0,161			2,94
		50	235	0,074			3,0
2	214	3,3	1501	0,47	18	10	3,08

		5	1254	0,395			3,16
		7	1051	0,331			3,21
		10	846	0,27			3,27
		20	512	0,16			3,36
		50	235	0,074			3,43
3	214	3,3	1501	0,472	9	10	4,3
		5	1254	0,395			4,38
		7	1050	0,331			4,45
		10	846	0,266			4,53
		20	512	0,161			4,66
4	320	3,3	1005	0,472	11	12	0,27
		5	840	0,395			0,276
		7	704	0,331			0,248
		10	566	0,266			0,252
		20	343	0,161			0,260
5	500	3,3	643	0,473	14	15	0,239
		5	538	0,395			0,244
		7	450	0,331			0,248
		10	362	0,266			0,252
		20	219	0,161			0,260
6	1000	3,3	321	0,472	20	22	0,211
		5	268	0,395			0,215
		7	223	0,331			0,219
		10	181	0,266			0,223
		20	110	0,16			0,23
7	2000	3,3	161	0,473	28	31	0,202
		5	134	0,395			0,206
		7	112	0,331			0,210
		10	91	0,266			0,214
		20	55	0,162			0,22
8	3000	3,3	107	0,473	34	37	0,196
		5	90	0,395			0,2
		7	75	0,331			0,203
		10	60	0,266			0,207
		20	37	0,161			0,213
		50	17	0,074			0,218

На рис. 2 представлены данные сравнительной оценки полученных теоретических результатов с экспериментальными, заимствованными из [1].

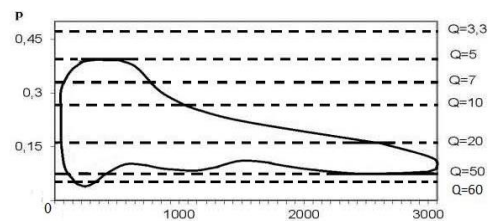


Рис. 2

Как следует из рис. 2, уточнение выражения для прогибов  $U, V, W$  и введение в



рассмотрение коэффициента добротности позволило с достаточной точностью описать весь представленный экспериментальный материал.

При  $Q = 3,3$   $P_{0_{кр}}$  стремится к своему максимальному верхнему значению для упругих оболочек.

С увеличением  $Q$  значения критических напряжений для одного и того же значения  $R/h$  падают и при  $Q \approx 60$  достигают своей нижней границы. Полученные результаты позволяют объяснить и падение  $P_{0_{кр}}$  с ростом  $R/h$  в зоне, где  $R/h$  равно 1000–3000.

Коэффициент добротности каждой конкретной оболочки определяется свойствами материала, из которого она изготовлена, и параметрами конструкции, в данном случае – отношением  $R/h$ . Чем тоньше оболочка, тем более высокое начальное значение добротности она имеет. Этот начальный уровень  $Q$  и определяет верхнюю границу устойчивости. Следует отметить, что коэффициент добротности  $Q$  интегрально учитывает и начальные неправильности оболочки. На рис. 3, на котором обозначение кривых идет сверху вниз, представлен характер изменения двух низших частот оболочек № 5, 6 из серии частот, не обращающихся в нуль, и трех высших частот из серии частот, которые первыми достигли нулевого значения  $\omega_{mn}$  при  $P_0 = P_{0_{кр}} + 0,01P_{0_{кр}}$ .

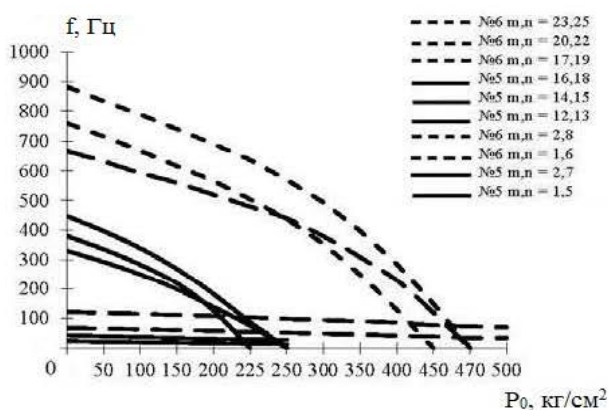


Рис. 3

Как следует из рис. 3, влияние роста силы  $P_0$  на значения низших частот колебаний оболочки  $f$  по сравнению с высшими –

незначительно. С приближением  $P_0$  к своему критическому значению в области низких частот появляются частоты с высоким значением  $m$  и  $n$ , в силу чего возможно появление резонансных явлений между колебаниями на частотах с кратными формами волнообразования  $m, n$ .

Подобная картина перестройки частот и форм колебаний с ростом силы  $P_0$  характерна и для подкрепленных цилиндрических оболочек [8]. Однако для этого типа оболочек имеет место несколько значений добротности.  $Q$  – для обшивки,  $Q_i$  – для подкрепляющего набора, что и определяет местную и общую потерю устойчивости.

Вернемся к табл. 3 и рассмотрим значения параметра  $\hat{p}$ . Анализ показывает, что значения параметра  $\hat{p}$  не зависят от отношения  $R/h$ , а являются функцией только параметра  $Q$ .

На рис. 4 точками представлены усредненные по типам оболочек значения параметра  $\hat{p}$  в зависимости от значения коэффициента добротности  $Q$ .

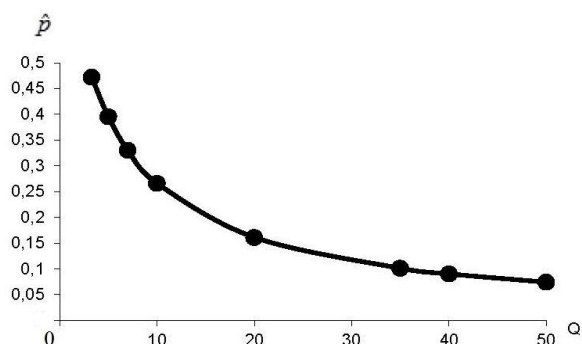


Рис. 4

Зависимость имеет степенной характер и хорошо аппроксимируется выражением

$$\hat{p}_Q = \exp^{-0,45Q^{0,45}} \quad (34)$$

Для критических напряжений шарнирно-опертых цилиндрических оболочек окончательно получаем

$$P_{0_{кр}} = \hat{p}_Q \frac{Eh}{R} = \exp^{-0,45Q^{0,45}} \frac{Eh}{R} \quad (35)$$

Из рис. 4 также следует, что чем ниже коэффициент добротности оболочки, тем выше для нее коэффициент  $\hat{p}$ . Для оболочки с коэффициентом добротности 1  $\hat{p} = 0,64$ . Это значение, близкое к значе-

нию  $\hat{p} = 0,605$ , можно считать пределом возможных значений  $\hat{p}$ . Однако оболочки, для которых  $Q < 3$ , уже относятся не к упругим системам. Для упругих гибких оболочек, как следует из табл. 3 и рис. 2,  $\hat{p} \leq 0,4$ .

**Выводы.** Введение уточнений в систему уравнений равновесия, более точное описание условия растяжимости срединной поверхности оболочек в направлении дуги, введение в систему уравнений коэффициента добротности  $Q$  позволило объяснить весь представленный экспериментальный материал и показать сам процесс потери устойчивости, включая параметры волнообразования и амплитуды колебаний оболочки с момента приложения осевой сжимающей силы до момента «хлопка».

Формула Лоренца-Тимошенко  $P_{0,кр} = \hat{p} \frac{Eh}{R}$

как была, так и остается фундаментальной в теории устойчивости оболочек. Однако в связи с вышеизложенным параметр  $\hat{p}$  (34) является не постоянной, а переменной величиной, индивидуальной для каждой конкретной оболочки и являющейся функцией ее коэффициента добротности  $Q$  для критических форм потери устойчивости.

### Список использованной литературы

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 463 – 471, 491–495.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 335.
3. Гладкий В. Ф. Динамика конструкции летательного аппарата. – М.: Наука, 1969. – С. 129–134.
4. Киселев В. А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1969. – С. 35–40.
5. Капля П. Г., Пинягин В. Д. К вопросу динамики подкрепленных цилиндрических оболочек // Космическая техника. Ракетное вооружение: Сб. науч.-техн. ст. – 2009. – Вып. 2. – С. 59–73.
6. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1967. – С. 88–89.

7. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – С. 257–259, 457–472.

8. Галака П. И. Исследование влияния осевых сжимающих сил на частоты и формы колебаний ребристых цилиндрических оболочек / П. И. Галака, В. А. Заруцкий, П. Г. Капля, В. И. Мацнер, А. М. Носаченко. – Киев: Прикладная механика, 1975. – Т. XI, вып. 8. – С. 41–48.

Статья поступила 10.03.2016