

В. П. Горбулин, А. В. Дегтярев, В. С. Шеховцов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ КРИВЫХ СКАТЫВАНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА С РАСШИРЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ

Рассмотрены результаты исследований, целью которых является расширение возможностей уравнения Эйлера для решения задачи о брахистохроне – задачи определения кривой наискорейшего скатывания. Отмечены два обстоятельства: первый интеграл уравнения Эйлера не содержит в явном виде частную производную по u от подынтегральной функции; при выводе классического уравнения Эйлера интегрируется по частям только второй член подынтегральной функции. Это позволило сформулировать задачу определения новых условий экстремальности функционала. Принято, что подынтегральная функция первой вариации функционала равна нулю. С учетом этого положения и некоторых других допущений построены процедуры одновременного использования уравнения Эйлера и его аналога, неинвариантного относительно системы координат. С использованием этих уравнений решена задача о брахистохроне: построены кривые, удовлетворяющие условиям оптимальности слабого минимума. Проведены численные оценки сравнения времени скатывания материальной точки по предлагаемым кривым и классическим экстремалам. Показано, что использование предлагаемых кривых обеспечивает меньшее время скатывания, чем при применении классических экстремалей.

Ключевые слова: первая вариация функционала, совместное использование условий экстремальности, неинвариантность относительно системы координат, параметрическая форма второй вариации, оптимальные кривые скатывания.

Розглянуто результати досліджень, метою яких є розширення можливостей рівняння Ейлера для розв'язання задачі про брахістохрону – визначення кривої найшвидшого скочування. Відзначені дві обставини: перший інтеграл рівняння Ейлера не містить в явному вигляді частинної похідної по u від підінтегральної функції; при виведенні класичного рівняння Ейлера інтегрується частинами тільки другий член підінтегральної функції. Це дозволило сформулювати задачу визначення нових умов екстремальності функціонала. Прийнято, що підінтегральна функція першої варіації функціонала дорівнює нулю. З урахуванням цього положення та деяких інших допущень побудовані процедури одночасного використання рівнянь Ейлера та його аналога, неінваріантного відносно системи координат. З використанням цих рівнянь розв'язано задачу про брахістохрону: побудовані криві, які відповідають умовам оптимальності слабого мінімуму. Проведено числові оцінювання порівняння часу скочування матеріальної точки по запропонованих кривих і класичних екстремалях. Показано, що використання запропонованих кривих забезпечує менший час скочування, ніж за використання класичних екстремалей.

Ключові слова: перша варіація функціонала, спільне використання умов екстремальності, неінваріантність відносно системи координат, параметрична форма другої варіації, оптимальні криві скочування.

The purpose of this study is the enhancement of Euler equation possibilities in order to solve the brachistochrone problem that is the determination of a curve of fastest descent. There are two circumstances: the first integral of an Euler equation does not contain a partial derivative of integrand with respect to u in an explicit form; when the classical Euler equation is derived, only the second term of integrand is integrated by parts. This allowed formulating a problem of determination of new conditions of functional extremality. It is assumed that the integrand of the first variation of a functional is equal to zero. Taking into account this provision and some other assumptions, the procedures have been determined for simultaneous application of the Euler equation and its analogue being non-invariant in relation to the coordinate system. The brachistochrone problem was solved using these equations: the curves that satisfy the conditions of weak minimum optimality were plotted. The time of a material point's descent along the suggested curves and the classic extremals was numerically compared. It is shown that the application of suggested curves ensures short descent time as compared to the classic extremals.

Key words: first variation of a functional, joint application of extremality conditions, non-invariance in relation to the coordinate system, parametric shape of the second variation, optimum curves of descent.

Задача о брахистохроне – задача определения кривой наискорейшего скатывания – была впервые поставлена в 1696 г. Иоганном Бернулли. Она состояла в том, чтобы «...среди плоских кривых, соединяющих две данные точки А и В, лежащих в одной вертикальной плоскости (В ниже А), найти ту, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, сонаправленной отрицательной полуоси ОУ, материальная точка из А достигнет В за кратчайшее время...».

Решение этой задачи было получено разными способами¹ Я. Бернулли, самим И. Бернулли, Лейбницем, Ньютоном и Лопиталем. Результатом решения стал вывод о том, что кривой наискорейшего скатывания – брахистохроной – является циклоида.

Задача о брахистохроне сыграла выдающуюся роль в математическом анализе: она оказалась первой в ряде задач, из которых сформировалось вариационное исчисление, необходимое сегодня для ученых, инженеров-исследователей, физиков и математиков. Предложенный метод ее решения дал возможность решить ряд замечательных задач из оптики, механики и геометрии.

На протяжении столь длительного времени вывод о том, что кривой наискорейшего скатывания является циклоида, не подвергался сомнению, и в большинстве научных трудов по вариационному исчислению рассматривается задача о брахистохроне.

Актуальность темы исследований. Одним из подразделов технической механики является динамика, занимающаяся исследованием и решением задач, связанных с движением тел (изделий) под действием сил. Задачу о брахистохроне можно рассматривать как задачу динамики, связанную с выбором траектории наискорейшего скатывания материальной точки под действием упрощенной силы земного тяготения.

Успехи в решении задач динамики значительно зависят от возможностей методов, используемых для их решения.

Ниже предлагается модернизированный вариационный метод решения задач, несколько отличающийся от классического. В его основе лежит совместное использование двух условий экстремальности, одним из которых является уравнение Эйлера. Использование нового условия экстремальности позволяет расширить возможности метода за счет определения экстремалей в более широком классе допустимых функций. Предлагаемый метод может быть использован для решения разнообразных проектных задач технической механики, в том числе задач, связанных с выбором оптимальных аэродинамических форм головных частей ракет, крыльев и других элементов летательных аппаратов. Например, в работе [5] с использованием предлагаемого метода проведен выбор формы тела вращения с минимальным аэродинамическим сопротивлением при нулевом угле атаки в гиперзвуковом невязком потоке. По результатам выбора показано уменьшение силы аэродинамического сопротивления тела по сравнению с силой, полученной для тех же условий, для тела вращения с образующей в форме степенной функции с показателем 0,75 [4].

Предлагаемый метод является первым шагом в разработке модернизированного метода решения вариационных задач механики со многими переменными. Использование последнего позволит получать новые результаты решения таких задач, как определение проектно-баллистических параметров ракет-носителей на начальных этапах их проектирования и на этапе разработки технических предложений; выбор оптимальных траекторий перелета космических аппаратов (КА) с одной орбиты на другую в центральном поле земного тяготения, выбор оптимальных режимов полета ракет-носителей при многократном включении маршевых двигателей при выведении КА на заданную орбиту и др.

¹ Например, Лейбниц применил прием, который далее развил Эйлер. Ныне метод Лейбница-Эйлера является одним из основных методов решения задач на максимум и минимум (так называемый прямой метод

в вариационном исчислении). Я. Бернулли получил свое решение при использовании принципа Гюйгенса, сделав таким образом еще один шаг к созданию теории Гамильтона-Якоби.

Актуальны также результаты решения задачи о брахистохроне, полученные в последнее время. На сегодня более сотни публикаций посвящены именно обобщению этой задачи. Среди них – задачи выбора оптимального движения переменной массы в разных постановках, определения оптимального движения тела (частицы) внутри туннеля на поверхности гравитирующего шара, движения частицы в силовых полях при околосветовых значениях скорости и др. [6].

Использование результатов решения, полученных в настоящей работе, будет безусловно полезным при проведении дальнейших исследований задач механики.

Расширение возможностей уравнения Эйлера. Повторим вывод уравнения Эйлера [1] для функционала (1), в котором выражения, формулирующие подинтегральную функцию, не содержат в явном виде ее аргумент.

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(y', y) dx, \quad (1)$$

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y_k(x_1) = y_1.$$

Вариация функционала (1) будет иметь вид

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0. \quad (2)$$

Проинтегрировав второе слагаемое по частям и принимая во внимание, что $\delta y' = (\delta y)'$, получим

$$\delta I = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0, \quad (3)$$

$$\text{где } \delta y|_{x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0, \quad (4)$$

$$\delta y|_{x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0.$$

Так как все допустимые кривые в рассматриваемой задаче проходят через фиксированные граничные точки (1) и выполняется условие (4),

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx. \quad (5)$$

При этом первый множитель $\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right)$ подинтегральной функции (5), реализующей экстремум, является непрерывной функцией, а второй – δy ввиду произвольного выбора кривой сравнения $y = \bar{y}(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей лишь некоторым общим условиям: функция δy в граничных точках $x = x_0, x = x_1$ обращается в ноль, непрерывно дифференцируемая один или несколько раз, δy или δy и $\delta y'$ малы по абсолютной величине.

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления, если для каждой непрерывной функции $\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0,$$

где функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_1]$, то

$$\Phi(x) = 0.$$

Применив основную лемму для упрощения условия (5), получим уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (6)$$

Продифференцировав подинтегральную функцию функционала (1) по x и подставив в нее уравнение (6), получим первый интеграл уравнения Эйлера

$$F - y' F_{y'} = c_2. \quad (7)$$

Рассмотрев условия (2), (3), (7), сделаем два замечания.

Уравнение (7) не содержит в явном виде F_y . Воспользовавшись (7), можно построить кривую, доставляющую в классическом понимании экстремальное значение функционалу (1), не обращая внимание на значение F_y .

При получении подинтегральной функции (5) интегрировался по частям только второй член подинтегральной функции (3). Первый член в этом интегрировании не участвовал. Лишь после сложения первого и второго членов образовалось в конечном счете уравнение Эйлера.

В таких условиях возникает вопрос: нельзя ли обеспечить F_y более активную

роль при формировании кривой, обеспечивающей экстремальное значение функционала (1)? С этой целью будем полагать, что вариация функционала (2) будет равна нулю, если ее подинтегральная функция в каждой точке заданного отрезка будет равна нулю:

$$F_y \delta y + F_{y'} \delta y' = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1. \quad (8)$$

Будем также полагать, что при выполнении указанных допущений и ограничений в некотором заданном классе непрерывных функций $y(x)$ существует множество кривых, каждая из которых доставляет локальный экстремум функционалу (1)².

Введем предположение, что

$$F_{y'} \neq 0, \quad F_y \neq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

Представим вариацию функции $y(x)$ и ее производную в виде

$$\begin{aligned} \delta y(x) &= \alpha \varphi(x), \\ \delta y'(x) &= \alpha \varphi'(x), \end{aligned} \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (9)$$

где α – бесконечно малая постоянная величина; $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ – неизвестные пока функции,

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \varphi(x_1) = 0.$$

С учетом (9) вариация функционала примет вид

$$\delta I = \alpha \int_{x_0}^{x_1} (F_y \varphi + F_{y'} \varphi') dx. \quad (10)$$

Для того чтобы искомая кривая доставляла экстремум функционалу, необходимо, чтобы первая вариация равнялась нулю:

$$\delta I = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

Это равенство может быть обеспечено, если подинтегральная функция выражения (10) будет равна нулю

$$F_y \varphi + F_{y'} \varphi' = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

Разделим это уравнение на F_y :

$$\varphi + \frac{F_{y'}}{F_y} \varphi' = 0. \quad (11)$$

Взяв определенный интеграл от уравнения (11), получим

$$\frac{F_{y'}}{F_y} \varphi \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{F_{y'}}{F_y} \right) \right) \varphi dx.$$

Пользуясь основной леммой вариационного исчисления и учитывая, что $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi(x_1) = 0$, получим

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{F_{y'}}{F_y} \right) - 1 = 0. \quad (12)$$

Проинтегрируем уравнение (12) и получим

$$F_{y'} = (x + c) F_y. \quad (13)$$

Продифференцировав по x уравнение (13), получим

$$\frac{dF_{y'}}{dx} - F_y = (x + c) \frac{dF_y}{dx}. \quad (14)$$

Относительно уравнения Эйлера при соблюдении условия (8). Проинтегрировав это условие по x , получаем

$$\left[F_y \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) \delta y dx = 0. \quad (15)$$

Заметим, что уравнение (15) ничем не отличается от уравнения (3). Следовательно, для уравнения (15) так же, как и в первом случае, применима основная лемма вариационного исчисления.

Применив лемму, получим уравнение (6). Проинтегрировав уравнение (6), получим уравнение (7).

Уравнения (7) и (14) мы получили используя одно базовое уравнение (8). Следовательно, при одновременном их использовании левая часть уравнения (14) будет равна нулю. Величину $\frac{dF_y}{dx}$ можно получить

продифференцировав уравнение (6)

² На первый взгляд шаткость такого предположения очевидна, так как подразумевает существование множества экстремалей без всякого на то обоснования. Причем предположение задается явно, а затем используется для получения решений, которые были постулированы. Сомнительность такого подхода в свое время была убедительно показана Л. Янгом [2].

Но классическое вариационное исчисление базируется на подобном предположении с той лишь разницей, что оно касается существования только одной экстремали в классе заданных непрерывных функций. Вряд ли кто-либо сегодня станет отрицать эффективность современного метода вариационного исчисления, построенного на базе такого необоснованного предположения.

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{d^2 F_{y'}}{dx^2}. \quad (16)$$

Подставив в уравнение (14) выражение для $\frac{dF_y}{dx}$, получим

$$\frac{d^2 F_{y'}}{dx^2} = 0. \quad (17)$$

Следовательно,

$$F_{y'} = c_0 x + c_1. \quad (18)$$

Таким образом, для того чтобы искомая кривая доставляла экстремум функционалу (1), необходимо, чтобы одновременно выполнялись уравнения (7) и (18)

$$F_{y'} = c_0 x + c_1; \quad (19)$$

$$F - y' F_{y'} = c_2. \quad (20)$$

Уравнения экстремали в параметрическом виде. Уравнения (19) и (20) можно представить в параметрическом виде, приняв, например,

$$y' = \text{ctg } \tau, \quad (21)$$

где τ – параметр.

С учетом выражения (21) уравнений (19), (20) можно представить в виде

$$y = F_1(\text{ctg } \tau, c_0, c_1, c_2); \quad (22)$$

$$x = F_2(\text{ctg } \tau, c_0, c_1, c_2).$$

Параметрическое представление уравнений (7) и (18) приводит к двум возможностям: *первой* – удовлетворив граничные условия с помощью двух постоянных, использовать третью для оптимизации значения функционала; *второй* – учитывая неинвариантность условия экстремальности (19) относительно системы координат, построить некоторую функцию f_u , обеспечивающую экстремальность кривой, заданной в параметрическом виде.

Только при удовлетворении условий (22) можно реализовать кривую, составляющую экстремум функционала. Для того чтобы установить, реализуется максимум или минимум функционала, нужно воспользоваться достаточными условиями экстремума.

Условия достаточности оптимальности функционала в параметрической форме. Условие (20) представляет собой первый интеграл уравнения Эйлера. Это дает нам возможность воспользоваться условиями достаточности оптимальности функционала, приведенными в работах по классическому вариационному исчислению.

Предположим, что в рассматриваемой задаче условие Якоби выполнено и, следовательно, искомая экстремаль C , проходящая через заданные точки, может быть включена в центральное поле, наклон которого равен $p(y, x)$.

Приращение ΔI функционала при переходе от экстремали C к некоторой близкой допустимой кривой \bar{C} после некоторых преобразований можно представить в виде [3]

$$\Delta I = \int_{\bar{C}}^C [F(y, y') - F(y, p) - (y' - p)F_p(y, q)] dx, \quad (23)$$

где q заключено между y' и p .

В дальнейшем будем полагать, что q достаточно близко к y' .

Подынтегральную функцию, стоящую в (23), называют функцией Вейерштрасса:

$$E(y, p, y') = F(y, y') - F(y, p) - (y' - p)F_p(y, q). \quad (24)$$

Предположим, что подынтегральная функция функционала (1) трижды дифференцируемая по аргументу y' . Тогда подынтегральную функцию приращения функционала (23), учитывая близость q и y' , можно с использованием формулы Тейлора представить в виде

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_k} \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(y, y') dx. \quad (25)$$

Избавимся от y' заменой (21), а искомую кривую представим с учетом второго условия (22). При близких значениях q и y' приращение функционала ΔI можно записать в виде

$$\Delta I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{(\text{ctg } \tau - p)^2}{2!} F_{y'y'}(\tau) \frac{dF_2}{d\tau} d\tau. \quad (26)$$

Функционал (1) будет иметь слабый минимум, если

$$F_{y'}(\tau) \frac{dF_2}{d\tau} \geq 0, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1, \quad (27)$$

если же левая часть неравенства (27) на участке $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_k$ меньше нуля, то слабый максимум.

Решение задачи о брахистохроне

Условия экстремальности функционала. Функционал, описывающий время скатывания, как известно, имеет вид

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_k} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx; \quad (28)$$

$$y_0(x_0=0)=0; \quad y_k(x_k)=y_k.$$

Условия экстремальности функционала (19) и (20) для функционала (28) запишем в виде

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) (c_0 x + c_1); \quad (29)$$

$$\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{c}. \quad (30)$$

Неинвариантность первого уравнения (29) относительно выбранной системы координат. Пусть $y(\tau)$ является сложной функцией вида

$$y(\tau) = f(u(\tau)), \quad (31)$$

где $f(u(\tau))$ – непрерывная функция с ненулевой частной производной $f_u(u(\tau))$; τ – параметр.

Продифференцируем (31) по параметру τ

$$\frac{dy}{d\tau} = f_u(u(\tau)) \frac{du}{d\tau}. \quad (32)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (32) на $\frac{dx}{d\tau}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = f_u(u(\tau)) \frac{du}{dx}. \quad (33)$$

Подставив (33) в функционал (28), получим

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_k} \frac{\sqrt{1 + f_u^2(u(\tau)) \left(\frac{du}{dx} \right)^2}}{\sqrt{y}} dx; \quad (34)$$

$$y_0(x_0=0)=0; \quad y_k(x_k)=y_k.$$

Первое условие экстремальности (19) для функционала (34) приобретет вид

$$F_{u'} = c_0 x + c_1 \quad (35)$$

или

$$f_u(u(\tau)) \frac{dy}{dx} = \left(\sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) (c_0 x + c_1). \quad (36)$$

Условие (36) отличается от условия (29). В левой части уравнения (36) появился новый множитель $f_u(u(\tau))$. Другими словами уравнение (29) неинвариантно относительно выбранной системы координат.

Условия экстремальности (29) в параметрической форме. Умножив уравнение (29) на $\frac{dx}{d\tau}$, получим

$$\frac{dy}{d\tau} = \left(\sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) (c_0 x + c_1) \frac{dx}{d\tau}. \quad (37)$$

Подставив в уравнение (37) левую часть уравнения (36), получим

$$\frac{dy}{d\tau} = f_u(u(\tau)) \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\tau} \quad (38)$$

или с учетом (21)

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} \frac{1}{f_u(u(\tau))} \operatorname{tg} \tau. \quad (39)$$

Подставив (21) в уравнение (30), получим

$$y = c \sin^2 \tau. \quad (40)$$

Продифференцировав уравнение (40) по параметру τ и подставив полученный результат в уравнение (39), получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{2c \sin^2 \tau}{f_u(u(\tau))} \quad (41)$$

$$\text{или } x = \int \frac{2c \sin^2 \tau}{f_u(u(\tau))} d\tau + c_4. \quad (42)$$

Таким образом, условия экстремальности кривой скатывания для функционала (28) в параметрической форме с учетом неинвариантности первого уравнения (29) можно представить в виде

$$x = 2c \int \frac{\sin^2 \tau}{f_u(u(\tau))} d\tau + c_4; \quad (43)$$

$$y = c \sin^2 \tau. \quad (44)$$

Условия достаточности оптимальности функционала (28) в параметрическом виде. С учетом правил, принятых в вариационном исчислении [1, 3], и особенностей перевода выражения (25) в параметрическую форму можно сформулировать следующие условия достаточности слабого минимума:

– кривая С является экстремалью (удовлетворяет уравнению Эйлера и заданным граничным условиям);

– каждый пучок кривых с центром в точке (0; 0) образует центральное поле, включающее экстремальную кривую, проходящую через заданную точку В ($x_k; y_k$) (легко проверить, что для экстремальных кривых это условие выполняется, см. рис.1 для кривой 1);

– функция (27) не меняет знака во всех точках ($x; y$), близких к кривой С и достаточно близких к значениям y' .

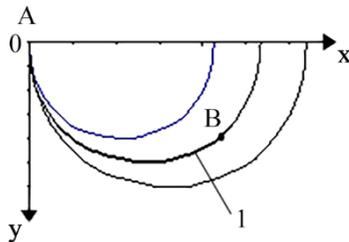


Рис.1. Центральное поле для кривой 1

Раскроем неравенство (27). Вычислив $F_{y'y'}(\tau)$ и $\frac{dF_2}{d\tau}$, получим

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad (45)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dF_2}{d\tau} = \frac{2c_0 \sin^2 \tau}{f(u(\tau))}. \quad (46)$$

Подставив (45) и (46) в неравенство (27), получим

$$\frac{2\sqrt{c_0} \sin^4 \tau}{f(u(\tau))} \geq 0. \quad (47)$$

Из условия (47) следует, что неравенство (27) будет выполняться, если

$$f_u(u(\tau)) \geq 0; \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_k. \quad (48)$$

Выбрав соответствующую функцию $f_u(u(\tau))$ для обеспечения условия (48), мы обеспечим выполнение условия достаточности оптимальности слабого минимума функционала (27).

Рассмотрим несколько положительных значений функции $f_u(u(\tau))$.

Классическая экстремаль ($f_u(u(\tau))=1$).

При этом условии решение уравнения (46) будет иметь вид

$$x = c_0(\tau - 0,5\sin 2\tau) + c_4. \quad (49)$$

С учетом граничных условий и уравнений (43) и (46) условия экстремальности кривой скатывания будут иметь вид

$$\begin{aligned} x &= c_0(\tau - 0,5\sin 2\tau); \\ y &= c_0 \sin^2 \tau \end{aligned} \quad (50)$$

или

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_0}{2}(2\tau - \sin 2\tau); \\ y &= \frac{c_0}{2}(1 - \cos 2\tau). \end{aligned} \quad (51)$$

Приняв в уравнениях (50) $2\tau = \tau_1$, получим уравнения семейства циклоид в обычной форме:

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_0}{2}(\tau_1 - \sin \tau_1); \\ y &= \frac{c_0}{2}(1 - \cos \tau_1), \end{aligned} \quad (52)$$

где $\frac{c_0}{2}$ – радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через конечную точку.

Таким образом, в случае $f_u(u(\tau))=1$ брахистохроной является циклоида.

Как показано во многих классических работах по вариационному исчислению, циклоида доставляет функционалу (28) сильный минимум.

Определим время скатывания по циклоиде с учетом уравнений (21), (40) и (41).

$$T_y = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_k} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{2c \sin^2 \tau}{\sqrt{c \sin^2 \tau}} d\tau = \sqrt{2} \sqrt{\frac{c}{g}} \tau_k$$

или $T_u = \sqrt{2} \sqrt{\frac{y_k}{g}} \frac{\tau_k}{\sin \tau_k}$. (53)

Кривая 1 (при $f_u(u(\tau))=1/\sin \tau$). Уравнение (46) при $f_u(u(\tau))=1/\sin \tau$ будет иметь вид

$$x = 2c_{01} \int \sin^3 \tau d\tau + c_4,$$

или $x = 2c_{01} \left(\frac{\cos^3 \tau}{3} - \cos \tau \right) + c_4$. (54)

С учетом заданных граничных условий уравнение (54) можно представить в форме

$$x = 2c_{01} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos^3 \tau - \cos \tau \right).$$

Таким образом, условия экстремальности кривой скатывания при $f_u(u(\tau))=1/\sin \tau$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} x &= 2c_{01} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos^3 \tau - \cos \tau \right); \\ y &= c_{01} \sin^2 \tau. \end{aligned} \quad (55)$$

С учетом (21) и (46) определим время скатывания по этой кривой

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{2c_{01} \sin^3 \tau}{\sqrt{c_{01} \sin^2 \tau}} d\tau = \sqrt{2} \sqrt{\frac{c_{01}}{g}} (1 - \cos \tau_k) \quad (56)$$

или с учетом второго уравнения (55) –

$$T_{k1} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{y_{k1}}{g}} \left(\frac{1}{\sin \tau_{k1}} - \text{ctg} \tau_{k1} \right). \quad (57)$$

Кривая 2 (при $f_u(u(\tau))=1/\sin^2 \tau$). Выражение (46) при выполнении $f_u(u(\tau))=1/\sin^2 \tau$ будет иметь вид

$$x = 2c_{02} \int \sin^4 \tau d\tau + c_5 \quad (58)$$

или $x = 2c_{02} \left(\frac{3}{8} \tau - \frac{\sin 2\tau}{4} + \frac{\sin 4\tau}{32} \right) + c_5$.

С учетом заданных граничных условий уравнения экстремали при $f_u(u(t))=1/\sin^2 t$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} x &= 2c_{02} \left(\frac{3}{8} \tau - \frac{\sin 2\tau}{4} + \frac{\sin 4\tau}{32} \right); \\ y &= c_{02} \sin^2 \tau. \end{aligned} \quad (59)$$

Определим время скатывания по предлагаемой кривой:

$$\begin{aligned} T_{k2} &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_k} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{2c_{02} \sin^4 \tau}{\sqrt{c_{02} \sin^2 \tau}} d\tau = 2 \sqrt{\frac{c_{02}}{2g}} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \sin^2 \tau d\tau \end{aligned}$$

или $T_{k2} = \frac{\sqrt{y_{k2}}}{\sqrt{2g}} \left(\frac{\tau_{k2}}{\sin \tau_{k2}} - \cos \tau_{k2} \right)$. (60)

Результаты расчетов. Проведены численные оценки по сравнению времени скатывания по кривым 1 и 2 и времени по соответствующим циклоидам. Времена скатывания определялись по формулам (53), (57), (60). Циклоиды были построены исходя из условий их прохождения через граничные точки кривых 1 и 2. Обеспечение условий прохождения циклоид через граничные точки кривых 1 и 2 проводилось в следующей последовательности. Для заданных начальных условий ($\tau_k = 3\pi/4$, $C_0 = 100$, $g = 9,8$ м/с²) определялись конечные точки кривой 1 (x_{k1} ; y_{k1}) и кривой 2 (x_{k2} ; y_{k2}). Полученные значения этих точек подставляли в уравнения циклоид. Делением первого уравнения на второе каждой циклоиды формировалось трансцендентное уравнение

$$\frac{x_k \sin^2 \tau_{ki}}{y_k} = \tau_{ki} - 0,5 \sin 2\tau_{ki}, \quad i=1,2.$$

Искомые τ_{ki} определялись численным методом. Значения c_{01} , c_{02} для циклоид определялись из уравнения

$$y_{ki} = c_{ox} \sin^2 \tau_{ki}, \quad i=1,2.$$

На рис. 2 приведены траектории скатывания материальной точки по циклоиде ($\tau_{u1} = 2,2994$) и кривой 1 ($f_u = 1/\sin \tau$) из точки А (0; 0) в точку В (251,1935; 50); на рис. 3 – траектории скатывания по циклоиде ($\tau_{u2} = 2,251$) и кривой 2 ($f_u = 1/\sin^2 \tau$) из точки А (0; 0) в точку В (226,72; 50). Из рис. 2, 3 следует, что кривые 1 и 2 ниже (круче) циклоид, за счет чего материальная точка на

нисходящей ветви набирает большую скорость. Суммарное приращение скорости на этой ветви больше, чем ее потери на восходящей (меньшей части) ветви, до точки В. Это приводит к уменьшению времени скатывания по кривым 1 и 2 по сравнению с временем скатывания по соответствующим циклоидам. Численные оценки показали, что время скатывания по кривой 1 составило $\approx 7,71$ с, по циклоиде, проходящей через те же граничные точки, что и кривая 1, $\approx 9,84$ с; время скатывания по кривой 2 $\approx 6,63$ с, по соответствующей циклоиде $\approx 9,249$ с.

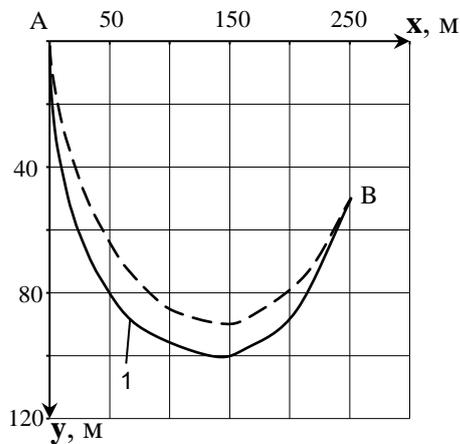


Рис. 2. Траектории скатывания по циклоиде ($\tau_{c1} = 2,2994$) и кривой 1 ($f_u = 1/\sin \tau$) из точки А (0; 0) в точку В (251,1935; 50)

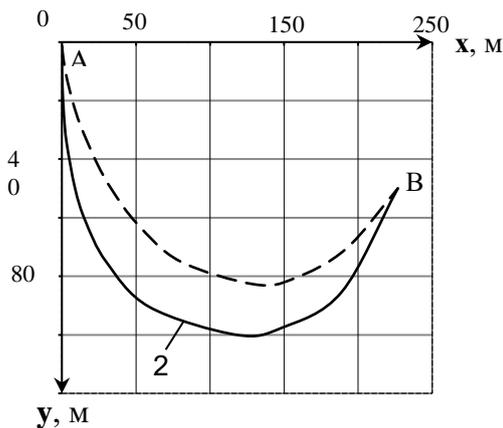


Рис. 3. Траектории скатывания по циклоиде ($\tau_{c2} = 2,251$) и кривой 2 ($f_u = 1/\sin^2 \tau$) из точки А (0; 0) в точку В (226,72; 50)

Выводы

1. В статье показано, что первый интеграл уравнения Эйлера не содержит в явном

виде частную производную F_y от подынтегральной функции и в этом смысле интеграл является самостоятельным уравнением. С другой стороны, при выводе классического уравнения Эйлера интегрируется по частям только второй член подынтегральной функции. Первый член, содержащий F_y , в этом интегрировании не участвует. Оба эти обстоятельства позволили сформулировать задачу о выборе $F_{y'}$ и F_y обеспечивающих новые условия экстремальности функционала.

2. Для решения сформулированной задачи принято, что подынтегральная функция первой вариации функционала равна нулю в каждой точке заданного отрезка. С учетом этого положения проведены две процедуры, в результате которых установлено, что для получения искомой кривой необходимо одновременное выполнение двух условий экстремальности функционала, одним из которых является первый интеграл уравнения Эйлера, другим – его аналог, неинвариантный относительно системы координат.

3. С использованием рассмотренных условий экстремальности получено новое решение известной задачи о брахистохроне – задачи определения кривой наискорейшего скатывания: построены две кривые, удовлетворяющие необходимым и достаточным условиям оптимальности слабого минимума. Проведены численные оценки сравнения времени скатывания материальной точки по предлагаемым кривым и классическим экстремалям. Показано, что использование предлагаемых кривых обеспечивает меньшее время скатывания, чем при применении классических экстремалей.

4. Предлагаемый метод определения кривой, основанный на использовании двух условий экстремальности, может быть использован при решении других задач технической механики.

Список использованной литературы

1. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1960. 462 с.

2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., 1974. 488 с.

3. Эльсгольц Л. Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1965. 420 с.

4. Теория оптимальных аэродинамических форм /под ред. А. Миеле. М., 1969. 507 с.

5. Шеховцов В. С. О минимальном аэродинамическом сопротивлении тела вращения при нулевом угле атаки в гиперзвуковом невязком потоке. *Космическая техника. Ракетное вооружение: Сб. науч.-техн. ст./ ГП «КБ «Южное». Днепр, 2016. Вып. 2. С. 3–8.*

6. Сумбатов А. С. Задача о брахистохроне (классификация обобщений и некоторые последние результаты). Труды МФТИ. 2017. Т. 9, №3(35). С. 66–75.

Статья поступила 14.01.2020