

УДК 621.643.07

Л. П. Малый, В. В. Лаврешов, Е. Н. Крамаренко, Д. С. Омельченко

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПРОГРАММ НАМОТКИ ТРУБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

*Приведена разработанная авторами методика расчета программ намотки труб прямоугольного сечения из композиционных материалов.*

*Наведено розроблену авторами методику розрахунку програм намотування труб прямокутного перетину з композиційних матеріалів.*

*The paper presents the authors-developed technique for calculating the programs for winding the pipes of rectangular cross-section made of composite materials.*

Использование труб прямоугольного сечения из композиционных материалов находит все большее распространение. Уже сегодня они применяются для изготовления спортивного инвентаря, в конструкциях современных средств передвижения, начиная от велосипеда, заканчивая самыми передовыми летательными и космическими аппаратами и т.п. Метод непрерывной намотки труб прямоугольного сечения позволяет получить широкий диапазон значений угла укладки нитей для удовлетворения специфических требований к трубе. Например, существует возможность получить конструкцию с нулевым коэффициентом линейного термического расширения.

Основным отличием намотки круглых труб от труб прямоугольного сечения является несимметричность сечения трубы, что приводит к тому, что возникает зависимость периода витка от начальной ориентации трубы (рис. 1); одна и та же лента раскладывается по-разному в сечении трубы в зависимости от углового положения (рис. 2).

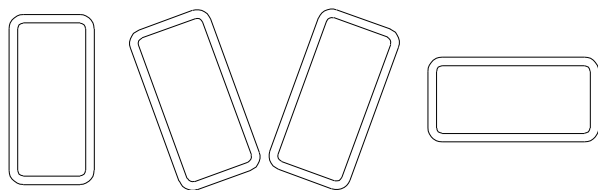


Рис. 1. Варианты ориентации трубы

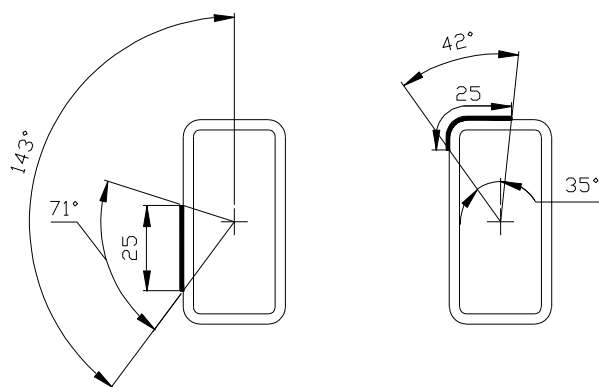


Рис. 2. Угловое положение ленты

Угол армирования на плоских гранях трубы не может изменяться, так как угол трения (угол негеодезического отклонения) не может принимать значения, отличные от нуля.

### Основные принципы, заложенные в расчет

По мнению авторов, рисунок намотки можно выбрать заранее и, желательно, попроще, чтобы в дальнейшем расчеты были легче. Например, авторы предпочитают выбирать однозаходную намотку со способом укладки лент «сверху».

Отсутствие заикливания предполагает различные траектории армирования для каждого витка.

Для совмещения витков используют два параметра:

- закрутку перехода;
- тангенс угла негеодезического отклонения на участке.

### Исходные данные для расчета

Для наглядности изложения рассчитаем два витка (чтобы показать способ их совмещения).

Допустим, надо намотать трубу длиной 1000 мм, показанную на рис. 3. Труба должна быть намотана с углом  $\alpha_{II}=45^\circ$ . Ширина наматываемой ленты  $B_l$  должна быть 25 мм.

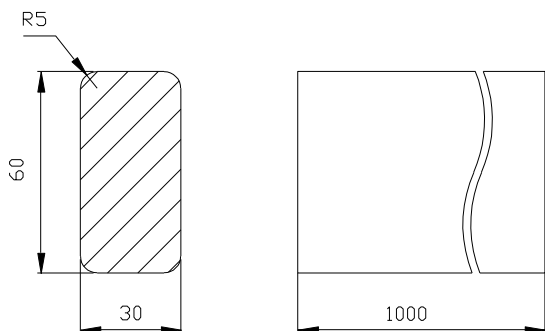


Рис. 3. Геометрические параметры наматываемой трубы

### Решение

Для обеспечения сплошности намотки определим ширину ленты, которая будет закладываться в расчет. Для этого определим число проходов при намотке

$$n_{\text{прох}} = \frac{\Pi \cdot \cos(\alpha_{II})}{B_l} = \frac{171,415927 \cdot \cos(45^\circ)}{25} = 4,848,$$

где  $\Pi = 2(a + b - R(4 - \pi)) = 171,415927$  мм – периметр сечения трубы;  $a=30$  мм – ширина меньшей грани;  $b=60$  мм – ширина большей грани;  $R=5$  мм – радиус сопряжения граней.

Число проходов при намотке должно быть натуральным:

$$n_{\text{прох}} = \text{ceil}(n_{\text{прох}}) = 5,$$

где  $\text{ceil}$  – функция округления до большего целого.

С учетом этого необходимо заданную ширину ленты скорректировать:

$$B_l = \frac{\Pi \cdot \cos(\alpha_{II})}{n_{\text{прох}}} = \frac{171,415927 \cdot \cos(45^\circ)}{5} = 24,242 \text{ мм.}$$

В дальнейших расчетах под шириной ленты будем понимать именно эту ширину, а число витков для намотки слоя –  $n_{\text{прох}}$ .

Условно разобьем трубу на три участка по длине, как показано на рис. 4.

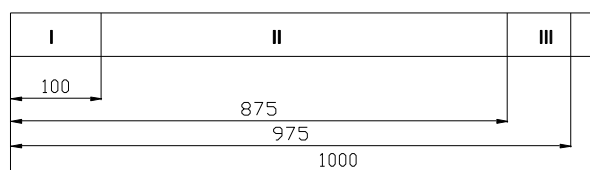


Рис. 4. Разбивка длины трубы на участки

На рис. 4 длина трубы принята 975 мм, а реальная длина – 1000 мм, это связано с тем, что лента (если принять ее ширину  $B_l=25$  мм) проходит  $1000-25=975$  мм, при этом перекрывается вся длина трубы.

На участке II угол армирования принимаем заданный –  $45^\circ$ . На участке I угол армирования меняется от  $90$  до  $45^\circ$ , а на участке III – от  $45$  до  $90^\circ$ .

Для дальнейших рассуждений введем понятия ребер и граней, наглядно показанных на рис. 5.

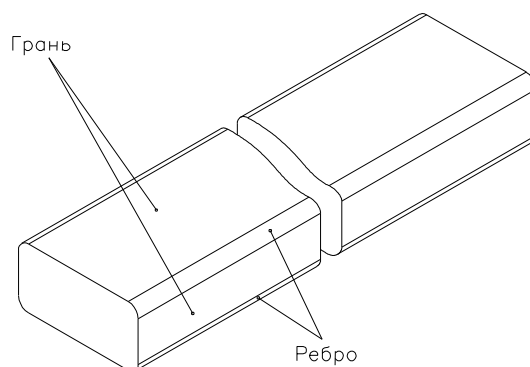


Рис. 5. Иллюстрация для ввода понятий ребер и граней

На гранях траектория витка, как говорилось ранее, может быть только прямой линией. Таким образом, изменение угла армирования возможно только на ребрах. Из практики известно, что самые устойчивые

траектории – это геодезические линии, после геодезических – линии равного отклонения.

Поскольку на цилиндрических поверхностях (ребрах) нам необходимо менять угол армирования, то по геодезическим линиям нам намотать не удастся. Примем, что на переходных участках (I, III) изменение угла армирования на ребрах происходит по линиям равного отклонения, причем  $\text{tg}\theta$  в пределах участка постоянен. Тогда несложно написать функции для переходного участка:

$$\alpha_k = f_1(\text{tg}\theta, \beta);$$

$$x_k = f_2(\text{tg}\theta, \beta),$$

где  $\alpha_k$  – угол армирования в конце переходного участка;  $x_k$  – координата конца переходного участка;  $\text{tg}\theta$  – тангенс угла негеодезического отклонения на участке;  $\beta$  – угол закрутки участка.

Согласно исходным данным (рис. 4) для первого перехода  $\alpha_k=45^\circ$ ;  $x_k = 100$ . Запишем выражение

$$(\alpha_k - f_1(\text{tg}\theta, \beta))^2 + (x_k - f_2(\text{tg}\theta, \beta))^2 \rightarrow 0. \quad (1)$$

Это выражение должно стремиться к нулю, чтобы наиболее полно удовлетворить исходным данным. Точного решения уравнения (1) (в большинстве случаев) не существует, зато его можно минимизировать по параметрам  $\text{tg}\theta, \beta$ .

Функция (1) не дифференцируема, поэтому необходим способ минимизации, который не требует вычисления производной (например, метод золотого сечения).

Минимизировав уравнение (1), мы получим приближенное значение  $x_k$ . Это допустимо для границы участков I и II, которые находятся в середине трубы. А если мы определяем для конца участка III? Допустим, решив уравнение (1) для участка III, мы получили значение  $x_k > 970$ , тогда лента при намотке будет выходить за пределы оправки, а это недопустимо.

В этом случае необходимо подобрать  $\beta$  (вблизи найденного решения) таким, чтобы  $x_k$  точно совпадало со значением, заданным в исходных данных (способ этого подбора не освещается в данной статье).

Для участка II с постоянным углом армирования необходимо найти только угол охвата (угол охвата – это угол поворота проекции вектора касательной к траектории армирования на плоскость, перпендикулярную оси вращения оправки при фиксированном начальном положении оправки), который равен соотношению

$$\beta_{II} = \frac{L_{II} \cdot \text{tg}(\alpha_{II})}{\Pi} \cdot 360,$$

где  $L_{II}$  – длина участка с постоянным углом армирования. Результаты расчета траектории первого витка приведены в табл. 1.

Таблица 1

Траектория первого витка

Угол охвата элемента	$x_{\text{нач}}$ , мм	$x_{\text{кон}}$ , мм	$\alpha_{\text{нач}}$ , мм	$\alpha_{\text{кон}}$ , мм	Угол охвата	Ст.	Поворот оправки	$\text{tg}\theta$
86,495377°	0	0,53719	90	81,885665	86,495377°	2	88,280869°	-0,094128
0°	0,53719	7,666007	81,885665	81,885665	86,495377°	2	88,280869°	0
90°	7,666007	9,377451	81,885665	73,614933	176,495377°	1	176,560187°	-0,094128
0°	9,377451	15,258107	73,614933	73,614933	176,495377°	1	176,560187°	0
90°	15,258107	18,182167	73,614933	65,680415	266,495377°	2	268,280869°	-0,094128
0°	18,182167	40,778612	65,680415	65,680415	266,495377°	2	268,280869°	0
90°	40,778612	44,979328	65,680415	58,212566	356,495377°	1	356,560187°	-0,094128
0°	44,979328	57,373781	58,212566	58,212566	356,495377°	1	356,560187°	0
90°	57,373781	62,943153	58,212566	51,302166	446,495377°	2	448,280869°	-0,094128
0°	62,943153	102,997604	51,302166	51,302166	446,495377°	2	448,280869°	0
89,999999°	102,997604	110,057607	51,302166	45	536,495376°	1	536,560187°	-0,094128
0,000001°	110,057607	110,057607	45	45	536,495377°	1	536,560187°	0
0°	110,057607	130,057607	45	45	536,495377°	1	536,560187°	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Угол охвата элемента	$x_{нач}, мм$	$x_{кон}, мм$	$\alpha_{нач}, мм$	$\alpha_{кон}, мм$	Угол охвата	Ст.	Поворот оправки	Продолжение табл. 1 $tg\theta$
0°	823,575294	873,575294	45	45	2066,495377°	2	2068,280869°	0
78,089708°	873,575294	880,389907	45	45	2144,585085°	1	2144,474743°	0
11,910292°	880,389907	881,410225	45	46,066354	2156,495377°	1	2156,560187°	0,125461
0°	881,410225	900,67929	46,066354	46,066354	2156,495377°	1	2156,560187°	0
90°	900,67929	907,217173	46,066354	54,747718	2246,495377°	2	2248,280869°	0,125461
0°	907,217173	942,556665	54,747718	54,747718	2246,495377°	2	2248,280869°	0
90°	942,556665	947,193016	54,747718	64,467793	2336,495377°	1	2336,560187°	0,125461
0°	947,193016	956,74633	64,467793	64,467793	2336,495377°	1	2336,560187°	0
90°	956,74633	959,661798	64,467793	75,042558	2426,495377°	2	2428,280869°	0,125461
0°	959,661798	973,01946	75,042558	75,042558	2426,495377°	2	2428,280869°	0
90°	973,01946	974,327642	75,042558	86,164055	2516,495377°	1	2516,560187°	0,125461
0°	974,327642	975,668644	86,164055	86,164055	2516,495377°	1	2516,560187°	0
30,597708°	975,668644	975,758127	86,164055	90	2547,093085°	2	2546,973152°	0,125461
59,402292°	975,758127	975,4915	90	84,121565	2606,495377°	2	2608,280869°	-0,099134
0°	975,4915	970,343522	84,121565	84,121565	2606,495377°	2	2608,280869°	0
90°	970,343522	968,915624	84,121565	75,351425	2696,495377°	1	2696,560187°	-0,099134
0°	968,915624	963,687904	75,351425	75,351425	2696,495377°	1	2696,560187°	0
90°	963,687904	960,993346	75,351425	66,918069	2786,495377°	2	2788,280869°	-0,099134
0°	960,993346	939,685173	66,918069	66,918069	2786,495377°	2	2788,280869°	0
90°	939,685173	935,658484	66,918069	58,981691	2876,495377°	1	2876,560187°	-0,099134
0°	935,658484	923,632572	58,981691	58,981691	2876,495377°	1	2876,560187°	0
90°	923,632572	918,175913	58,981691	51,654674	2966,495377°	2	2968,280869°	-0,099134
0°	918,175913	878,624028	51,654674	51,654674	2966,495377°	2	2968,280869°	0
89,999998°	878,624028	871,604817	51,654674	45	3056,495375°	1	3056,560185°	-0,099134
0,000002°	871,604817	871,604817	45	45	3056,495377°	1	3056,560187°	0
0°	871,604817	851,604817	45	45	3056,495377°	1	3056,560187°	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0°	100,233148	80,233148	45	45	4676,495377°	1	4676,560187°	0
0,489644°	80,233148	80,190418	45	45	4676,985021°	2	4677,040126°	0
89,510356°	80,190418	73,41683	45	53,502874	4766,495377°	2	4768,280869°	0,125677
0°	73,41683	36,422658	53,502874	53,502874	4766,495377°	2	4768,280869°	0
90°	36,422658	31,54131	53,502874	63,106974	4856,495377°	1	4856,560187°	0,125677
0°	31,54131	21,397791	63,106974	63,106974	4856,495377°	1	4856,560187°	0
90°	21,397791	18,260591	63,106974	73,600931	4946,495377°	2	4948,280869°	0,125677
0°	18,260591	3,545673	73,600931	73,600931	4946,495377°	2	4948,280869°	0
90°	3,545673	2,02996	73,600931	84,690894	5036,495377°	1	5036,560187°	0,125677
0°	2,02996	0,17141	84,690894	84,690894	5036,495377°	1	5036,560187°	0
42,304556°	0,17141	0	84,690894	90	5078,799933°	2	5078,83947°	0,125677

Примечание. Ст. – сторона: 1 – узкая грань; 2 – широкая грань.

Расчет следующего витка проводим по той же самой методике, что и для первого. Но для совмещения первого и второго витков необходимо определить два дополнительных параметра:

- поворот оправки после намотки первого витка;
- угол охвата первого перехода второго витка.

Для этого просчитаем второй виток без учета этих параметров.

Обозначим координату конца первого перехода первого витка  $x_1$ , а координату конца первого перехода второго витка  $x_2$ .

В координате  $x = \max(x_1, x_2)$  просчитаем углы закрутки первого  $\beta_1$  и второго  $\beta_2$  витков.

Тогда можно записать из условия обеспечения сплошности (рис. 6)

$$\text{Mod}(\beta_2 + \varphi_2, 360) - \text{Mod}(\beta_1 + \varphi_1, 360) - t \cdot \mathbf{B}(t, \beta_1 + \varphi_1) = 0, \quad (2)$$

где  $\beta_1$  – угол закрутки первого витка в точке с координатой  $x$ ;  $\beta_2$  – угол закрутки второго витка в точке с координатой  $x$ ;  $\varphi_1$  – угол точки схода первого витка в се-

чении  $x=0$ ;  $\varphi_2$  – угол точки схода второго витка в сечении  $x=0$ ;  $B$  – угол раскладки ленты в зависимости от направления укладки и ее углового положения в сечении с координатой  $x$ ;  $\text{Mod}$  – функция выделения остатка от деления.

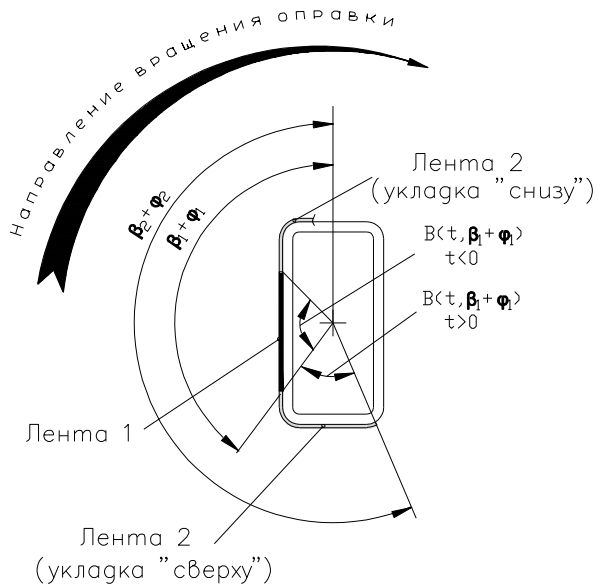


Рис. 6. Схема совмещения витков

Если траектория первого витка рассчитана, то принимаем известными  $\beta_1, \varphi_1$ . Как ранее говорилось, способ укладки мы выбираем заранее (например,  $t=+1$ ). Угловая ширина ленты показана на рис. 2 и рассчитывается из геометрических соображений.

Тогда уравнение (2) решается относительно  $\beta_2, \varphi_2$ , которые, в свою очередь, зависят от угла поворота оправки  $\eta$ .

С учетом вышесказанного уравнение (2) можно переписать в таком виде:

$$f(\Delta\eta) = 0, \tag{3}$$

где  $\Delta\eta$  – угол поворота оправки после намотки первого витка до намотки второго витка.

Решив уравнение (3), мы находим угол поворота оправки после первого витка и угол закрутки переходного участка второго витка. Для нашего примера  $\Delta\eta=0, \beta_2=562,654697$ .

На рис. 7 показано, как совместились прямой ход витка 1 с прямым ходом витка 2.

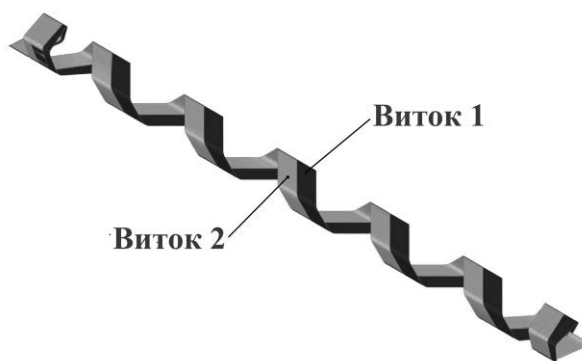


Рис. 7. Совмещение витков

Обратный ход второго витка рассчитывается по аналогии с прямым ходом витка.

Траектория второго витка приведена в табл. 2.

Таблица 2

Траектория второго витка

Угол охвата элемента	$x_{нач}, \text{мм}$	$x_{кон}, \text{мм}$	$\alpha_{нач}, \text{мм}$	$\alpha_{кон}, \text{мм}$	Угол охвата	Ст.	Поворот оправки	$\text{tg}\theta$
58,053895°	0	0,290459	90	83,451582	5216,495377°	1	5216,560187°	-0,113045
0°	0,290459	2,586293	83,451582	83,451582	5216,495377°	1	5216,560187°	-0,113045
90°	2,586293	4,196357	83,451582	73,496269	5306,495377°	2	5308,280869°	-0,113045
0°	4,196357	19,010573	73,496269	73,496269	5306,495377°	2	5308,280869°	-0,113045
90°	19,010573	22,079029	73,496269	64,027259	5396,495377°	1	5396,560187°	-0,113045
0°	22,079029	31,821905	64,027259	64,027259	5396,495377°	1	5396,560187°	-0,113045
90°	31,821905	36,445762	64,027259	55,262404	5486,495377°	2	5488,280869°	-0,113045
0°	36,445762	71,115966	55,262404	55,262404	5486,495377°	2	5488,280869°	-0,113045
90°	71,115966	77,441404	55,262404	47,33677	5576,495377°	1	5576,560187°	-0,113045
0°	77,441404	95,873123	47,33677	47,33677	5576,495377°	1	5576,560187°	-0,113045
28,660644°	95,873123	98,275535	47,33677	45	5605,156021°	2	5605,021852°	-0,113045
61,339356°	98,275535	103,628403	45	45	5666,495377°	2	5668,280869°	0

Угол охвата элемента	$x_{нач}$ , мм	$x_{кон}$ , мм	$\alpha_{нач}$ , мм	$\alpha_{кон}$ , мм	Угол охвата	Ст.	Поворот оправки	$tg\theta$
0°	103,628403	153,628403	45	45	5666,495377°	2	5668,280869°	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0°	789,292109	839,292109	45	45	7106,495377°	2	7108,280869°	0
28,660644°	839,292109	841,793222	45	45	7135,156021°	1	7135,706852°	0
61,339356°	841,793222	846,841948	45	48,413615	7196,495377°	1	7196,560187°	0,076491
0°	846,841948	864,590282	48,413615	48,413615	7196,495377°	1	7196,560187°	0,076491
90°	864,590282	870,945228	48,413615	53,765914	7286,495377°	2	7288,280869°	0,076491
0°	870,945228	907,585395	53,765914	53,765914	7286,495377°	2	7288,280869°	0,076491
90°	907,585395	912,769013	53,765914	59,5112	7376,495377°	1	7376,560187°	0,076491
0°	912,769013	924,544648	59,5112	59,5112	7376,495377°	1	7376,560187°	0,076491
90°	924,544648	928,631861	59,5112	65,616626	7466,495377°	2	7468,280869°	0,076491
0°	928,631861	951,295375	65,616626	65,616626	7466,495377°	2	7468,280869°	0,076491
90°	951,295375	954,345258	65,616626	72,03159	7556,495377°	1	7556,560187°	0,076491
0°	954,345258	960,831463	72,03159	72,03159	7556,495377°	1	7556,560187°	0,076491
90°	960,831463	962,888099	72,03159	78,687989	7646,495377°	2	7648,280869°	0,076491
0°	962,888099	972,889985	78,687989	78,687989	7646,495377°	2	7648,280869°	0,076491
90°	972,889985	973,9831	78,687989	85,502575	7736,495377°	1	7736,560187°	0,076491
0°	973,9831	975,55623	85,502575	85,502575	7736,495377°	1	7736,560187°	0,076491
58,857409°	975,55623	975,758127	85,502575	90	7795,352786°	2	7795,820678°	0,076491
70,520941°	975,758127	975,510792	90	85,401968	8006,495378°	2	8008,280869°	-0,065271
0°	975,510792	971,489616	85,401968	85,401968	8006,495378°	2	8008,280869°	-0,065271
90°	971,489616	970,452586	85,401968	79,58054	8096,495378°	1	8096,560187°	-0,065271
0°	970,452586	966,774877	79,58054	79,58054	8096,495378°	1	8096,560187°	-0,065271
90°	966,774877	964,918378	79,58054	73,865793	8186,495378°	2	8188,280869°	-0,065271
0°	964,918378	950,454276	73,865793	73,865793	8186,495378°	2	8188,280869°	-0,065271
90°	950,454276	947,758777	73,865793	68,311185	8276,495378°	1	8276,560187°	-0,065271
0°	947,758777	939,804333	68,311185	68,311185	8276,495378°	1	8276,560187°	-0,065271
90°	939,804333	936,241475	68,311185	62,962649	8366,495378°	2	8368,280869°	-0,065271
0°	936,241475	910,724132	62,962649	62,962649	8366,495378°	2	8368,280869°	-0,065271
90°	910,724132	906,256428	62,962649	57,857173	8456,495378°	1	8456,560187°	-0,065271
0°	906,256428	893,68961	57,857173	57,857173	8456,495378°	1	8456,560187°	-0,065271
90°	893,68961	888,270056	57,857173	53,022234	8546,495378°	2	8548,280869°	-0,065271
0°	888,270056	850,622766	53,022234	53,022234	8546,495378°	2	8548,280869°	-0,065271
90°	850,622766	844,194342	53,022234	48,475992	8636,495378°	1	8636,560187°	-0,065271
0°	844,194342	826,484891	48,475992	48,475992	8636,495378°	1	8636,560187°	-0,065271
73,160377°	826,484891	820,469523	48,475992	45	8709,655755°	2	8710,659936°	-0,065271
16,839623°	820,469523	818,999989	45	45	8726,495378°	2	8728,280869°	0
0°	818,999989	768,999989	45	45	8726,495378°	2	8728,280869°	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0°	161,190264	141,190264	45	45	10076,495378°	1	10076,560187°	0
73,160377°	141,190264	134,805817	45	45	10149,655755°	2	10150,659936°	0
16,839623°	134,805817	133,365922	45	46,175213	10166,495378°	2	10168,280869°	0,097704
0°	133,365922	85,376107	46,175213	46,175213	10166,495378°	2	10168,280869°	0,097704
90°	85,376107	78,64527	46,175213	52,853881	10256,495378°	1	10256,560187°	0,097704
0°	78,64527	63,494066	52,853881	52,853881	10256,495378°	1	10256,560187°	0,097704
90°	63,494066	58,278406	52,853881	60,178548	10346,495378°	2	10348,280869°	0,097704
0°	58,278406	29,61827	60,178548	60,178548	10346,495378°	2	10348,280869°	0,097704
90°	29,61827	25,794695	60,178548	68,081476	10436,495378°	1	10436,560187°	0,097704
0°	25,794695	17,747235	68,081476	68,081476	10436,495378°	1	10436,560187°	0,097704
90°	17,747235	15,225508	68,081476	76,447966	10526,495378°	2	10528,280869°	0,097704
0°	15,225508	3,173534	76,447966	76,447966	10526,495378°	2	10528,280869°	0,097704
90°	3,173534	1,894141	76,447966	85,119095	10616,495378°	1	10616,560187°	0,097704
0°	1,894141	0,186251	85,119095	85,119095	10616,495378°	1	10616,560187°	0,097704
50,016495°	0,186251	0	85,119095	90	10666,511873°	2	10666,722871°	0,097704

Примечание. Ст. – сторона: 1 – узкая грань; 2 – широкая грань.

Данная методика заложена в программу расчета программ намотки. Вид готовой

трубы представлен на рис. 8.



Рис. 8. Готовая труба

### **Выводы**

С помощью описанной методики разрабатывались программы намотки на трубы различного сечения и длины. Готовые изделия, намотанные по программам на осно-

вании разработанной методики, подтверждают ее правильность.

Статья поступила 30.05.2017