

УДК 519.677:531.332

Д-р техн. наук В. С. Шеховцов

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ЭКСТРЕМАЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Целью статьи является разработка модифицированного вариационного метода определения экстремалей в задачах поиска оптимальных решений. Метод разработан с использованием результатов исследований первой вариации функционала с автономной подынтегральной функцией для задачи с закрепленными концами. Введено допущение о ненулевых значениях вариаций функции в граничных точках. Показано, что при использовании этого допущения и введении некоторых других допущений и ограничений можно расширить класс допустимых функций, среди которых следует искать экстремальные кривые. При таком расширении для построения одной экстремали необходимо использовать два условия экстремальности, одним из которых является уравнение Эйлера. Для их обеспечения необходимо выполнение постоянства частной производной от подынтегральной функции искомой переменной в каждой точке рассматриваемого отрезка. Новое условие экстремальности в отличие от уравнения Эйлера неинвариантно относительно системы координат. Использование этого свойства позволяет при представлении второй вариации функционала в параметрическом виде построить решения, удовлетворяющие необходимым и достаточным условиям локального минимума (максимума). Отмечено, что предлагаемый метод является первым шагом в разработке нового подхода к решению многомерных вариационных задач. Использование последнего позволит получать новые решения разнообразных задач технической механики, таких, например, как задачи определения оптимальных параметров траекторий ракет-носителей на этапе проектирования и разработки технических предложений, выбора оптимальных режимов полета и др. Работоспособность предлагаемого метода продемонстрирована на примере решения известной задачи о брахистохроме – определения кривой наискорейшего скатывания. С использованием метода построены две кривые, удовлетворяющие необходимым и достаточным условиям оптимальности. Приведены результаты сравнения времени скатывания материальной точки по предлагаемым кривым и скатывания по классическим экстремалиям. Показано, что время скатывания по предлагаемым кривым меньше, чем при скатывании по классическим экстремалиям.

**Ключевые слова:** первая вариация функционала, совместное использование условий экстремальности, неинвариантность относительно системы координат, параметрическая форма второй вариации, оптимальные кривые скатывания.

Метою статті є розроблення модифікованого варіаційного методу визначення екстремалей у задачах пошуку оптимальних рішень. Метод розроблено з використанням результатів досліджень першої варіації функціонала з автономною підінтегральною функцією для задачі із закріпленими кінцями. Введено припущення про ненульові значення варіацій функції в межових точках. Показано, що на час використання цього припущення та введення деяких інших припущень і обмежень можна розширити клас допустимих функцій, серед яких слід шукати екстремальні криві. За такого розширення для побудови однієї екстремали необхідно використовувати дві умови екстремальності, однією з яких є рівняння Ейлера. Для їх забезпечення необхідне виконання постійності частинної похідної від підінтегральної функції за шуканою змінною у кожній точці даного відрізка. Нова умова екстремальності на відміну від рівняння Ейлера неінваріантна відносно системи координат. Використання цієї властивості дозволяє за поданням другої варіації функціонала в параметричному вигляді побудувати рішення, що задовольняють необхідні та достатні умови локального мінімуму (максимуму). Зазначено, що запропонований метод є першим кроком у розробленні нового підходу до вирішення багаторозмірних варіаційних задач. Використання останнього дозволить отримувати нові рішення різноманітних задач технічної механіки, таких, наприклад, як задачі визначення оптимальних параметрів траекторій ракет-носіїв на етапі проектування та розроблення технічних пропозицій, вибору оптимальних режимів польоту й інш. Працездатність запропонованого методу продемонстровано на прикладі розв'язання відомої задачі про брахистохрону – визначення кривої найшвидшого скочування. З використанням методу побудовані дві криві, що задовольняють необхідні та достатні умови оптимальності. Наведено результати порівняння часу скочування матеріальної точки по запропонованих кривих і скочування по класичних екстремаліях. Показано, що час скочування по запропонованих кривих менший, ніж під час скочування по класичних екстремаліях.

**Ключові слова:** перша варіація функціонала, спільне використання умов екстремальності, неінваріантність відносно системи координат, параметрична форма другої варіації, оптимальні криві скочування.

The purpose of the article is development of a modified variational method to determine extremals in the tasks of search for optimal solutions. The method has been developed using the results of investigations of the first variation of functional with autonomous subintegral function for the problem with fixed ends. The assumption of non-zero values of variation of function at boundary points has been introduced. It is shown that when using this assumption and introducing some other assumptions and limitations, it is possible to expand the class of permissible functions, among which the extremal curves should be sought for. With this expansion, to construct one extremal it is necessary to use two conditions of extremeness, one of which is Euler equation. To fulfill them, it is necessary to realize the constancy of partial derivative from subintegral function of desired variable at each point of interval considered. The new condition of extremeness unlike Euler equation is noninvariant relative to coordinate system. The use of this property allows, at presentation of the second variation of functional in parametrical form, constructing the solutions that satisfy the necessary and sufficient conditions of local minimum (maximum). It is noted that the proposed method is the first step in the development of a new approach to solution of multidimensional variational problems. The use of the latter will allow obtaining new solutions of various problems of technical mechanics, such as the task of determining optimal trajectory parameters of launch vehicles in the phase of designing and development of technical proposals, selection of optimal flight modes et al. The efficiency of the proposed method is demonstrated by example of solving the known problem about brachistochrone – determination of the curve of quickest descent. Using the method, two curves have been constructed that satisfy the necessary and sufficient conditions of optimality. The results are presented of comparison of time of material point descent along the proposed curves and descent along classical extremals. It is shown that the time of descent along the proposed curves is shorter than that at descent along classical extremals.

**Keywords:** the first variation of functional, combined usage of conditions of extremeness, noninvariance relative to coordinate system, parametrical form of the second variation, optimal curves of descent.

К настоящему времени создан мощный методический инструментарий для решения задач, связанных с выбором оптимальных характеристик различных объектов (изделий) и их оптимального управления. В его основе лежат известные методы вариационного исчисления, линейного и динамического программирования, методы Лагранжа-Понтрягина, случайного поиска и многие другие. Особое место среди них занимает метод вариационного исчисления, сыгравший в свое время выдающуюся роль в математическом анализе. Началом его разработки послужила известная задача о брахистохроне, поставленная в 1696 г. Иоганном Бернулли. Задача состояла в том, чтобы «...среди плоских кривых, соединяющих две данные точки А и В, лежащих в одной вертикальной плоскости (В ниже А), найти ту, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, сонаправленной отрицательной полуоси ОУ, материальная точка из А достигнет В за кратчайшее время...». Решение этой задачи было получено разными способами<sup>1</sup> самим И. Бернулли,

Лейбницем, Ньютоном, Я. Бернулли и Лопиталем. Результатом решения стал вывод о том, что кривой наискорейшего скатывания – брахистохроной – является циклоида.

Задача о брахистохроне и ее решение сыграли значительную роль. Она оказалась первой в ряде задач, из которых сформировалось вариационное исчисление, необходимое сегодня для ученых, инженеров-исследователей, физиков и математиков. Метод, предложенный И. Бернулли, дал возможность решить ряд задач по оптике, механике и геометрии.

На протяжении столь длительного времени вывод о том, что кривой наискорейшего скатывания является циклоида, не подвергался сомнению, а среди большинства научных трудов по вариационному исчислению трудно найти издание, в котором бы не рассматривалась задача о брахистохроне.

**Актуальность темы исследований.** Одним из подразделов технической механики является динамика. К классу задач этого подраздела относят задачи, связанные с исследованием движения тел (изделий) под действием сил. Успехи в решении этих задач значительно зависят от возможностей методов, используемых для их решения. Ниже предлагается модернизированный вариационный метод решения задач, несколько отличающийся от классического. В

<sup>1</sup> Например, Лейбниц применил прием, который далее развил Эйлер. Ныне метод Лейбница-Эйлера является одним из основных методов решения задач на максимум и минимум (так называемый прямой метод в вариационном исчислении). Я. Бернулли получил свое решение при использовании принципа Гюйгенса, сделав таким образом еще один шаг к созданию теории Гамильтона-Якоби.

его основе лежит совместное использование двух условий экстремальности, одним из которых является уравнение Эйлера. Использование нового условия экстремальности позволяет расширить возможности метода за счет определения экстремалей в более широком классе допустимых функций. Предлагаемый метод может быть использован для решения разнообразных проектных задач технической механики, в том числе задач, связанных с выбором оптимальных аэродинамических форм головных частей ракет, крыльев и других элементов летательных аппаратов. Например, в работе [1] с использованием предлагаемого метода проведен выбор формы тела вращения с минимальным аэродинамическим сопротивлением при нулевом угле атаки в гиперзвуковом невязком потоке. По результатам выбора предложена образующая тела вращения в форме двух уравнений в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= c_1 \operatorname{tg} t + c_2 & t_0 \leq t \leq t_k \\ y &= c_3 \operatorname{tg}^3 t, \end{aligned}$$

где  $x, y$  – декартовы координаты образующей;  $t$  – параметр.

Использование такой образующей позволяет уменьшить аэродинамическое сопротивление тела вращения по сравнению с телом вращения и образующей в форме степенной функции с показателем 0,75, полученной в работе [2] (рис. 1, 2).

Предлагаемый метод является первым шагом в разработке модернизированного метода решения вариационных задач механики со многими переменными. Использование последнего позволит получать новые результаты решения таких задач, как определение проектно-баллистических параметров ракет-носителей на начальных этапах их проектирования и на этапе разработки технических предложений; выбор оптимальных траекторий перелета космических аппаратов (КА) с одной орбиты на другую в центральном поле земного тяготения, выбор оптимальных режимов полета ракет-носителей при многократном включении маршевых двигателей при выведении КА на заданную орбиту и др.

Актуальны также результаты решения задачи о брахистохроне. В миниатюре задачу о брахистохроне можно рассматривать как задачу динамики, связанную с выбором траектории наискорейшего скатывания материальной точки под действием упрощенной силы земного тяготения. Эта задача продолжает привлекать внимание многих механиков. На сегодня более сотни публикаций посвящены именно ее обобщению.

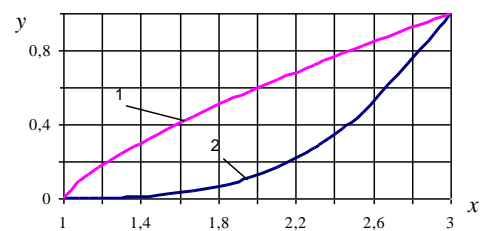
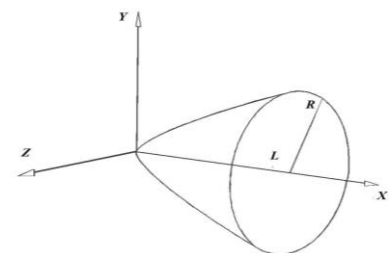
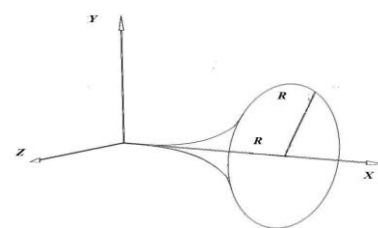


Рис. 1. Классическая (1) и предлагаемая (2) образующие тел вращения (для граничных условий  $y_0(x_0=1)=0; y_k(x_k=3)=1; c_3=0,01$ )



а



в

Рис. 2. Общая аэродинамическая форма тел вращения при использовании классической (а) и предлагаемой (в) образующих

Среди публикаций – задача выбора оптимального движения переменной массы в разных постановках, определения оптимального движения тела (частицы) внутри тоннеля на поверхности гравитирующего шара, движения частицы в силовых полях при больших околосветовых значениях скорости и др. [3]. Использование получен-

ных в работе результатов решения будет, безусловно, полезным при проведении дальнейших исследований задач механики подобного рода.

**Метод получения условий экстремальности.** Рассмотрим функционал вида

$$I = \int_{x_0}^{x_k} F(y, \dot{y}) dx, \quad y_0(x_0 = 0) = 0, \quad y_k(x_k) = y_k. \quad (1)$$

Построим процедуру на основе применения метода вариационного исчисления [4] при использовании вариации функции  $y(x)$  в виде

$$\delta y = \alpha \varphi(x),$$

где  $\alpha$  – бесконечно малое постоянное число;

$\varphi(x)$  – некоторая непрерывная функция.

Задача состоит в выборе такой функции  $y(x)$ , при которой функционал (1) принимает экстремальное значение.

Запишем первую вариацию функционала (1)

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_k} (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta \dot{y}) dx. \quad (2)$$

Предположим, что в некотором заданном классе непрерывных функций  $y(x)$  существует множество кривых, каждая из которых доставляет локальный экстремум функционалу<sup>2</sup>. Производную вариации функции  $y(x)$  запишем в виде

$$\delta \dot{y}(x) = \alpha \dot{\varphi}(x), \quad x_0 \leq x \leq x_k, \quad (3)$$

где  $\dot{\varphi}(x)$  – также непрерывная функция; здесь  $\dot{\varphi}(x)$  – производная от функции  $\varphi(x)$

<sup>2</sup> На первый взгляд шаткость такого предположения очевидна, так как подразумевает существование множества экстремалей без всякого на то обоснования. Причем предположение задается явно, а затем используется для получения решений, которые были постулированы. Сомнительность такого подхода в свое время была убедительно показана Л. Янгом [5]. Но классическое вариационное исчисление базируется на подобном предположении с той лишь разницей, что оно касается существования только одной экстремали в классе заданных непрерывных функций. Вряд ли кто-либо сегодня станет отрицать эффективность современного метода вариационного исчисления, построенного на базе такого необоснованного предположения.

по независимой переменной  $x$ .

Положим, что

$$\varphi(x) \neq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_k. \quad (4)$$

Допущение (4) с учетом того, что  $\delta y = \alpha \varphi(x)$ , означает, что вариации функции  $\delta y_0$  и  $\delta y_k$  в граничных точках принимают ненулевые значения.

Допущение (4) весьма существенно, так как позволяет при введении некоторых других допущений и ограничений расширить класс допустимых функций, среди которых следует искать кривые, доставляющие функционалу экстремальные значения. В классическом вариационном исчислении при выводе уравнения Эйлера для задачи с закрепленными концами вариации функции в граничных точках приравниваются к нулю.

С учетом (3) вариацию функционала (2) представим в виде

$$\delta I = \alpha \int_{x_0}^{x_k} (F_{\dot{y}} \dot{\varphi} + F_y \varphi) dx. \quad (5)$$

Будем полагать, что частные производные по  $y$  и  $\dot{y}$  от подынтегральной функции функционала (1) на рассматриваемом отрезке независимой переменной принимают ненулевые значения

$$F_y \neq 0, \quad F_{\dot{y}} \neq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_k. \quad (6)$$

Вариация функционала (5) равна нулю, если

$$F_{\dot{y}} \dot{\varphi}(x) + F_y \varphi(x) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_k. \quad (7)$$

Учитывая условие (6), разделим уравнение (7) на  $F_y$  и проинтегрируем его

$$\frac{F_{\dot{y}}}{F_y} \varphi(x) \Big|_{x_0}^{x_k} - \int_{x_0}^{x_k} \varphi(x) \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{F_{\dot{y}}}{F_y} \right) - 1 \right) dx = 0. \quad (8)$$

Пусть выражение в скобках подынтегральной функции

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{F_{\dot{y}}}{F_y} \right) - 1 = 0. \quad (9)$$

Тогда интеграл в уравнении (8) будет равен нулю. Для выполнения (8) его первый член также должен равняться нулю.

$$\frac{F_{\dot{y}}}{F_y} \varphi(x) \Big|_{x_0}^{x_k} = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_k. \quad (10)$$

Проинтегрировав уравнение (9), получим

$$F_{\dot{y}} = (x + c)F_y. \quad (11)$$

Уравнение (11) при выполнении (10) представляет собой условие экстремальности функционала (1).

Заметим, что в классическом случае уравнение (8) будет иметь такой вид:

$$F_{\dot{y}} \varphi(x) \Big|_{x_0}^{x_k} - \int_{x_0}^{x_k} \varphi(x) \left( \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} - F_y \right) dx = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) будет иметь место, если

$$\frac{d}{dx} F_{\dot{y}} - F_y = 0; \quad (13)$$

$$F_{\dot{y}} \varphi(x) \Big|_{x_0}^{x_k} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, при выполнении предположений (4), (6), (10), (14) искомая экстремаль должна удовлетворять уравнениям (11) и (13):

$$F_{\dot{y}} = (x + c)F_y; \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx} F_{\dot{y}} - F_y = 0. \quad (16)$$

Определим условие совместного выполнения уравнений (15) и (16). Продифференцируем уравнение (15):

$$\frac{dF_{\dot{y}}}{dx} = F_y + (x + c) \frac{dF_y}{dx}. \quad (17)$$

Подставив в (17) уравнение (16), с учетом (6) получим

$$F_y = c_1, \quad c_1 \neq 0. \quad (18)$$

Из условий (6) и (18) следует, что, для того чтобы уравнения (15) и (16) определяли искомую экстремаль, необходимо, чтобы частная производная по  $y$  от подынтегральной функции функционала (1) на рассматриваемом отрезке была ненулевой постоянной величиной.

С учетом (6) и (18) уравнение (15) будет иметь такой вид:

$$F_{\dot{y}} = c_1 x + c_2, \quad c_1 \neq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_k. \quad (19)$$

Первый интеграл уравнения Эйлера (16) имеет вид

$$F - \dot{y} F_{\dot{y}} = c_3, \quad x_0 \leq x \leq x_k. \quad (20)$$

Таким образом, при выполнении условий (4), (6), (10), (14) искомая экстремаль должна удовлетворять одновременно уравнениям (19), (20)

$$\begin{aligned} F_y &= c_1 x + c_2; \\ F - \dot{y} F_y &= c_3; \end{aligned} \quad x_0 \leq x \leq x_k. \quad (21)$$

#### Выполнение допущений (10) и (14).

Условия (4), (6) определяют ограничения на значения функций  $\varphi(x)$ ,  $F_{\dot{y}}$ ,  $F_y$ , с учетом которых ищется решение. Допущения (10) и (14) выполняются при соблюдении условия (18) и первого уравнения (21). Действительно, подставив в уравнение (7) условие (18) и первое уравнение (21), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\dot{\varphi}(x)}{\varphi(x)} = - \frac{c_1}{c_1 x + c_2}.$$

Его решение имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{c_0}{c_1 x + c_2}, \quad c_0 > 0. \quad (22)$$

Подставив выражение (22) в условия (10), (14), получим

$$\begin{aligned} \frac{F_{\dot{y}}}{F_y} \varphi(x) \Big|_{x_0}^{x_k} &= \frac{c_0}{c_1} \Big|_{x_0}^{x_k} = 0; \\ F_{\dot{y}} \varphi(x) \Big|_{x_0}^{x_k} &= c_0 \Big|_{x_0}^{x_k} = 0, \end{aligned} \quad x_0 \leq x \leq x_k. \quad (23)$$

Выполнение второго условия (23) означает выполнение уравнения Эйлера (13), с использованием которого определяется классическая экстремаль.

**Особый случай.** Умножив уравнение (8) на  $\alpha$  и подставив в подынтегральную функцию выражение для  $\varphi(x)$ , получим

$$\frac{F_{\dot{y}}}{F_y} \delta y(x) \Big|_{x_0}^{x_k} - \int_{x_0}^{x_k} \alpha \frac{c_0}{c_1 x + c_2} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{F_{\dot{y}}}{F_y} \right) - 1 \right) dx = 0. \quad (24)$$

Если при каком-то значении  $\bar{x}$

$$f(\bar{x}) = c_1 \bar{x} + c_2 = 0,$$

значение подынтегральной функции в уравнении (24) станет неопределенным:

$$\alpha c_0 \frac{0}{0}.$$

Раскроем неопределенность. Продифференцируем функцию  $f(x)$  и определим ее значение в окрестности точки  $\bar{x}$ :

$$f(\bar{x} + \Delta x) = c_1 dx. \quad (25)$$

Рассмотрим дифференциал  $dx$  как бесконечно малую разность, введенную в свое время Г. Лейбницем как бесконечно малую постоянную величину (которая меньше всякой конечной величины и все же не равна нулю). Подставив (25) в подынтегральную функцию уравнения (24), запишем

$$\int_{x_0}^{x_k} \alpha \frac{c_0}{c_1 dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{F_{\dot{y}}}{F_y} \right) - 1 \right) dx = 0. \quad (26)$$

По предположению,  $\alpha$  также бесконечно малая постоянная величина, которую можно рассматривать как бесконечно малую разность  $dx$ . Сократив  $\alpha$  и  $dx$  в выражении (26), получим, что в точке  $\bar{x}$  выражение, стоящее перед скобками в подынтегральной функции уравнения (24), примет ненулевое конечное значение, что и требовалось доказать.

**Анализ результатов** показывает, что в отличие от классического случая для построения экстремалей для функционала (1) необходимо одновременное выполнение двух уравнений (21) при обеспечении постоянства частной производной от подынтегральной функции по  $y$  в каждой точке рассматриваемого отрезка. Первое и второе уравнения являются первыми интегралами уравнения Эйлера. Разница состоит в том, что при определении экстремали по первому уравнению (21)  $F_y = c_1$  используется явно, по второму –  $F_y$  при вычислении экстремали не используется. Таким образом, первое уравнение (21) является условием, которое можно использовать для расширения класса допустимых функций, среди которых следует искать экстремали. Первое уравнение (21) в отличие от второго инвариантно относительно системы координат. Это, с одной стороны, несколько

усложняет поиск экстремалей, с другой – открывает новые возможности в получении новых решений за счет соответствующего выбора системы координат. В общем случае вторая вариация функционала (1) имеет вид

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_k} \left( F_{\dot{y}\dot{y}} \delta \dot{y}^2 + 2F_{y\dot{y}} \delta y \delta \dot{y} + F_{yy} \delta y^2 \right) dt.$$

Так как выполняется условие  $F_y = c_1$  при  $c_1 \neq 0$  и  $x_0 \leq x \leq x_k$ , вторая вариация функционала приобретает форму, аналогичную условию Лежандра:

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_k} F_{\dot{y}\dot{y}} \delta \dot{y}^2 dt.$$

**Уравнения экстремали в параметрическом виде.** Уравнения (21) можно представить в параметрическом виде, приняв, например,

$$\dot{y} = \text{ctgt}. \quad (27)$$

С учетом (27) уравнения (21) можно записать в общем виде:

$$\begin{aligned} F_{\dot{y}}(y, \text{ctgt}) &= c_1 x + c_2; \\ F(y, \text{ctgt}) - \text{ctgt}(c_1 x + c_2) &= c_3. \end{aligned} \quad (28)$$

При заданных граничных условиях уравнения (28) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} y &= F_1(\text{ctgt}, c_1, c_2, c_3, t_k); \\ x &= F_2(\text{ctgt}, c_1, c_2, c_3, t_k). \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнения (29) будут представлять искомыми экстремаль в параметрической форме.

**Решение задачи о брахистохроне.** Функционал, описывающий время скатывания, как известно, имеет вид

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_k} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dx; \\ y_0(x_0 = 0) &= 0; y_k(x_k) = y_k. \end{aligned} \quad (30)$$

Условия экстремальности кривой скатывания (21) для функционала (30) запишем в виде

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{y}\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c_1 x + c_2; \quad (31)$$

$$\sqrt{y}\sqrt{1 + \dot{y}^2} = \sqrt{c_0}. \quad (32)$$

Подставив уравнение (32) в уравнение (31) и проинтегрировав последнее, получим

$$y = \sqrt{c_0} \left( \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3 \right). \quad (33)$$

Учитывая (31) – (33), можно сформулировать следующее: если искомые экстремали существуют, то они должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}} &= c_1 x + c_2; \\ \sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2} &= \sqrt{c_0}; \\ y &= \sqrt{c_0} \left( \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

**Неинвариантность первого уравнения (34) относительно системы координат.**

Пусть  $y(t)$  является сложной функцией вида

$$y(t) = f(u(t)), \quad (35)$$

где  $f(u(t))$  – непрерывная функция с ненулевой частной производной  $f_u(u(t))$ ;  $t$  – параметр.

Продифференцируем (35) по параметру  $t$

$$\frac{dy}{dt} = f_u(u(t)) \frac{du}{dt}. \quad (36)$$

Разделив левую и правую части уравнения (36) на  $\frac{dx}{dt}$ , получим

$$\frac{dy}{dx} = f_u(u(t)) \frac{du}{dx}. \quad (37)$$

Подставив (37) в подынтегральную функцию функционала (30), получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + f_u^2(u(t)) \left( \frac{du}{dx} \right)^2}}{\sqrt{y}} dx. \quad (38)$$

Условия экстремальности (34) для функционала (38) можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_u(u(t)) \frac{dy}{dx} &= \sqrt{c_0} (c_1 x + c_2); \\ \sqrt{y} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} &= \sqrt{c_0}; \\ y &= \sqrt{c_0} \left( \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Из (39) следует, что первое условие в отличие от второго и третьего неинвариантно

относительно системы координат: в первом условии в левой части уравнения появился новый множитель  $f_u(u(t))$ .

**Условия экстремальности для функционала (30) в параметрической форме.** Подставив (27) во второе уравнение (39), получим

$$y = c_0 \sin^2 t. \quad (40)$$

Продифференцировав третье уравнение (39) и уравнение (40) по параметру  $t$ , получим

$$\frac{dy}{dt} = 2c_0 \sin t \cos t; \quad (41)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{c_0} (c_1 x + c_2) \frac{dx}{dt}. \quad (42)$$

Из первого уравнения (39) и уравнения (42) следует

$$\frac{dy}{dt} = f_u(u(t)) \operatorname{ctgt} \frac{dx}{dt}. \quad (43)$$

Приравняв правые части уравнений (41) и (43), получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2c_0 \sin^2 t}{f_u(u(t))} \quad (44)$$

или

$$x = \int \frac{2c_0 \sin^2 t}{f_u(u(t))} dt + c_4. \quad (45)$$

Таким образом, условия экстремальности кривой скатывания для функционала (30) в параметрической форме с учетом неинвариантности первого уравнения (39) и уравнения (45) будут иметь следующий вид:

$$y = c_0 \sin^2 t, \quad (46)$$

$$x = 2c_0 \int \frac{\sin^2 t}{f_u(u(t))} dt + c_4. \quad (47)$$

**Классическая экстремаль ( $f_u(u(t))=1$ ).**

При этом условии решение уравнения (47) имеет вид

$$x = c_0(t - 0,5 \sin 2t) + c_4. \quad (48)$$

С учетом граничных условий (30) и уравнения (46) условия экстремальности кривой скатывания будут иметь вид

$$x = c_0(t - 0,5 \sin 2t);$$

$$y = c_0 \sin^2 t$$

или

$$x = \frac{c_0}{2}(2t - \sin 2t);$$

$$y = \frac{c_0}{2}(1 - \cos 2t).$$

Приняв, что  $2t=t_1$ , получим уравнение семейства циклоид в обычной форме

$$x = \frac{c_0}{2}(t_1 - \sin t_1);$$

$$y = \frac{c_0}{2}(1 - \cos t_1),$$

где  $\frac{c_0}{2}$  – радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через конечную точку  $(x_k, y_k)$ .

Таким образом, в случае  $f_u(u(t)) = 1$  брахистохроной является циклоида.

Как показано во многих работах, циклоида доставляет функционалу (30) сильный минимум.

Выражение для определения времени скатывания по циклоиде с учетом уравнений (48) и (44) имеет вид

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_k} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_k} \frac{2c_0 \sin^2 t}{\sqrt{c_0} \sin^2 t} dt = \sqrt{2} \sqrt{\frac{c_0}{g}} t_k \end{aligned}$$

или

$$I_u = \sqrt{2} \sqrt{\frac{y_k}{g}} \frac{t_k}{\sin t_k}. \quad (49)$$

**Кривая 1 (при  $f_u(u(t))=1/\sin t$ ).** Уравнение (47) при  $f_u(u(t))=1/\sin t$  имеет вид

$$x = 2c_{01} \int \sin^3 t dt + c_4$$

или

$$x = 2c_{01} \left( \frac{\cos^3 t}{3} - \cos t \right) + c_4. \quad (50)$$

С учетом граничных условий (30) уравнение (50) можно представить в форме

$$x = 2c_{01} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos^3 t - \cos t \right).$$

Таким образом, условия экстремальности кривой скатывания при  $f_u(u(t))=1/\sin t$  имеют вид

$$x = 2c_{01} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos^3 t - \cos t \right); \quad (51)$$

$$y = c_{01} \sin^2 t.$$

С учетом (27) и (51) определим время скатывания по этой кривой

$$I_{k1} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_k} \frac{2c_{01} \sin^3 t}{\sqrt{c_{01}} \sin^2 t} dt = \sqrt{2} \sqrt{\frac{c_{01}}{g}} (1 - \cos t_k)$$

или с учетом второго уравнения (51) –

$$I_{k1} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{y_{k1}}{g}} \left( \frac{1}{\sin t_{k1}} - \operatorname{ctgt}_{k1} \right). \quad (52)$$

**Кривая 2 (при  $f_u(u(t))=1/\sin^2 t$ ).** При выполнении этого условия выражение (47) имеет вид

$$x = 2c_{02} \int \sin^4 t dt + c_5$$

или

$$x = 2c_{02} \left( \frac{3}{8} t - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32} \right) + c_5.$$

С учетом заданных граничных условий (30) уравнения экстремали при выполнении условия  $f_u(u(t))=1/\sin^2 t$  имеют вид

$$y = c_{02} = \sin^2 t;$$

$$x = 2c_{02} \left( \frac{3}{8} t - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32} \right).$$

Определим время скатывания по предлагаемой кривой

$$I_{k2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_k} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dx$$

или

$$I_{k2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_k} \frac{2c_{02} \sin^4 t}{\sqrt{c_{02}} \sin^2 t} dt = 2 \sqrt{\frac{c_{02}}{2g}} \int_{t_0}^{t_k} \sin^2 t dt,$$

или

$$I_{k2} = \frac{\sqrt{y_{k2}}}{\sqrt{2g}} \left( \frac{t_{k2}}{\sin t_{k2}} - \cos t_{k2} \right). \quad (53)$$



**Оптимальность кривых 1 и 2.** Для того чтобы кривые доставляли минимум функционалу (30), необходимо и достаточно [6], чтобы последние удовлетворяли уравнению Эйлера (условие выполняется), каждый пучок кривых с центром в точке (0, 0) образует центральное поле, включающее кривую, проходящую через заданную точку  $B(x_k, y_k)$ . Для данных кривых это условие также выполняется (например, рис. 3, кривая 1), во всех точках кривых вторая производная от подынтегральной функции функционала по производной, входящей в эту функцию, является неотрицательной (условие Лежандра).

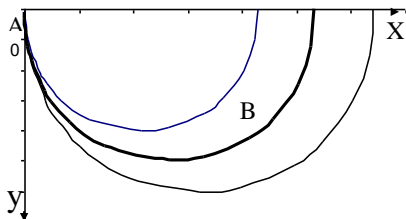


Рис. 3. Центральное поле для кривой 1

Для функционала (30) условие Лежандра можно записать в виде

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_k} F_{\dot{y}\dot{y}} \delta y^2 dx, \quad (54)$$

где 
$$F_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}^{\frac{3}{2}}}. \quad (55)$$

С учетом (55) при использовании в качестве независимой переменной параметра  $t$  условие (54) представим в виде

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{d\delta y}{dt} \right)^2 \frac{1}{\dot{x}(t)} dt. \quad (56)$$

Подставив в подынтегральную функцию уравнения (56) условия (27), (44) и (46), получим

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\sqrt{c_0}} \left( \frac{d\delta y}{dt} \right)^2 f_u(u(t)) dt. \quad (57)$$

Из (57) следует, что для выполнения условия Лежандра необходимо

$$f_u(u(t)) \geq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_k. \quad (58)$$

Таким образом, выбрав функцию  $f_u(u(t))$  с учетом условия (58) можно построить

кривую скатывания, доставляющую сильный минимум функционалу (30).

Для кривой 1 условие (58) имеет вид

$$1/\sin t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

для кривой 2 –

$$1/\sin^2 t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq n\pi,$$

где  $n$  – любое вещественное число.

**Результаты расчетов.** Ниже приведены результаты численных оценок сравнения времени скатывания по кривым 1 и 2 и времени по соответствующим циклоидам. Время скатывания определялось по формулам (49), (52), (53). Циклоиды были построены исходя из условий их прохождения через граничные точки кривых скатывания. Обеспечение этих условий проводилось в следующей последовательности. Для заданных начальных условий ( $t_k=3\pi/4$ ,  $c_0=100$ ,  $g=9,8$  м/с<sup>2</sup>) определялись конечные значения  $(x_{k1}, y_{k1})$ ,  $(x_{k2}, y_{k2})$  кривых 1 и 2. Полученные значения подставляли в уравнения циклоид. Делением первого уравнения на второе каждой циклоиды формировалось трансцендентное уравнение

$$\frac{x_k}{y_k} \sin^2 t_{ki} = t_{ki} - 0,5 \sin 2t_{ki}, \quad i=1, 2.$$

Искомые  $t_{ki}$  определялись численным методом. Значения  $c_{01}$ ,  $c_{02}$  для циклоид определялись из уравнения

$$y_{ki} = c_{0i} \sin^2 t_{ki}, \quad i=1, 2.$$

На рис. 4, 5 приведены траектории скатывания материальной точки по циклоидам и кривым 1 и 2. Из рис. 4, 5 следует, что кривые 1 и 2 ниже (круче) циклоид, за счет чего материальная точка на нисходящей ветви набирает большую скорость. Суммарное приращение скорости на этой ветви больше, чем ее потери на восходящей (меньшей части) ветви до точки В. Это приводит к уменьшению времени скатывания по кривым 1 и 2 по сравнению с временем скатывания по соответствующим циклоидам. Численные оценки показали, что время скатывания по кривой 1 составило ~7,7 с, по циклоиде, проходящей через те же граничные точки, что и кривая 1, ~9,8 с; время скатывания по кривой 2 составило ~6,5 с,

по соответствующей циклоиде –  $\sim 9,5$  с.

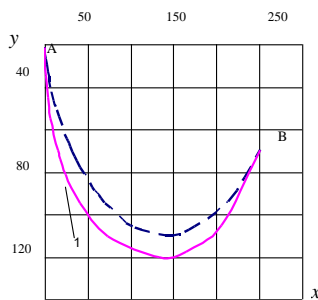


Рис. 4. Траектории скатывания по циклоиде и кривой 1 ( $f_u=1/\sin t$ ) из точки А (0, 0) в точку В (251,185; 50 м)

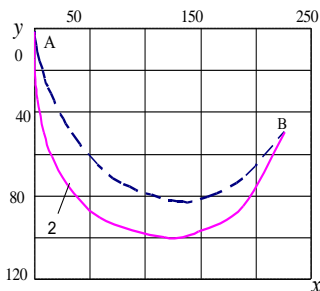


Рис. 5. Траектории скатывания по циклоиде и кривой 2 ( $f_u=1/\sin^2 t$ ) из точки А (0, 0) в точку В (226,715; 50 м)

### Выводы

1. В статье предложен модифицированный метод построения экстремалей при решении задач поиска оптимальных решений. Метод разработан с использованием результатов исследований первой вариации функционала с автономной подынтегральной функцией для задачи с закрепленными концами.

2. В основу метода положено допущение о ненулевых значениях вариаций функции в граничных точках. Использование этого допущения и введение некоторых других допущений и ограничений позволило расширить класс допустимых функций, среди которых следует искать экстремальные прямые.

3. Использование предлагаемого подхода позволило получить два уравнения экстремальности, одним из которых является уравнение Эйлера. Их одновременное использование позволяет получить одну экстремаль, которая в ряде случаев может удовлетворять необходимым и достаточным условиям оптимальности.

4. Работоспособность метода продемонстрирована на примере решения известной задачи о брахистохроне – определения кривой наискорейшего скатывания. С использованием предлагаемого метода построены две кривые, удовлетворяющие необходимым и достаточным условиям оптимальности при представлении второй вариации функционала в параметрическом виде. Проведены численные оценки сравнения времени скатывания материальной точки по предлагаемым кривым и классическим экстремалям. Показано, что использование предлагаемых кривых обеспечивает меньшее время скатывания, чем применение классических экстремалей.

5. Предлагаемый модифицированный метод решения вариационных задач может быть использован при решении ряда других задач технической механики.

### Список использованной литературы

1. Шеховцов В. С. О минимальном аэродинамическом сопротивлении тела вращения при нулевом угле атаки в гиперзвуковом невязком потоке// Космическая техника. Ракетное вооружение: Сб. науч.-техн. ст. – 2016. – Вып. 2. – Днепр: ГП «КБ «Южное». – С. 3–8.
2. Теория оптимальных аэродинамических форм /Под ред. А. Миеле. – М.: Мир, 1969. – 507 с.
3. Сумбатов А. С. Задача о брахистохроне (классификация обобщений и некоторые последние результаты)// Тр. МФТИ. – 2017. – Т. 9, № 3 (35). – С. 66–75.
4. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. – М.: Изд. иностр. лит., 1960. – 462 с.
5. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. – 488 с.
6. Эльсгольц Л. Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 420 с.

Статья поступила 18.04.2018