УДК 517.977.55 https://doi.org/10.33136/stma2020.01.133

П. П. Завьялов, В. О. Сидорук

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Использование множителей Лагранжа при решении задачи оптимального управления в линейной постановке с квадратичным критерием качества приводит к необходимости решения краевой задачи с условиями для множителей на правом конце интервала управления. Решение получаемых уравнений с целью синтеза регулирования в прямом времени, исходя из начального состояния, стабилизирующего эффекта, как правило, не дает. Для синтеза регулирования широко применяется метод аналитического конструирования оптимального регулятора на основе стабилизирующей матрицы, которая получается решением алгебраического уравнения Риккати. Однако при этом имеются некоторые сложности: необходимость вычисления стабилизирующей матрицы, невозможность вычисления этой матрицы в нестационарной задаче. В статье предлагается метод синтеза регулирования путем решения краевой задачи на интервале цикла регулирования. Для этого дифференциальные уравнения для параметров состояния и множителей Лагранжа выражаются в виде разностных линейных соотношений. Учитывая равенство нулю параметров состояния и множителей Лагранжа в конце цикла, множители Лагранжа в начале цикла определяются по известным значениям параметров состояния на этот же момент путем решения указанной линейной системы. Полученные величины формируют закон регулирования. Вследствие малой длительности цикла регулирования в закон регулирования вводится усиливающий коэффициент. Его значение определяется по результатам предварительного моделирования. Работоспособность предложенного метода проверена на примере принятой динамической системы, в том числе нестационарной. Усиливающий коэффициент достаточно просто подбирается по виду процесса стабилизации. Предложенный метод может быть использован в системах управления ракет различного назначения для регулирования параметров движения.

Ключевые слова: оптимальное управление, закон регулирования, множитель Лагранжа, интервал цикла регулирования, усиливающий коэффициент.

Використання множників Лагранжа для розв'язання задачі оптимального керування у лінійній постановці з квадратичним критерієм якості викликає потребу розв'язати крайову задачу з умовами для множників на правому кінці інтервалу керування. Розв'язання отриманих рівнянь з метою синтезу регулювання у прямому часі, виходячи з початкового стану, стабілізуючого ефекту, як правило, не дає. Для синтезу регулювання широко застосовують метод аналітичного конструювання оптимального регулятора на основі стабілізуючої матриці, яку одержують розв'язуючи алгебраїчне рівняння Ріккаті. Проте при цьому є деякі труднощі: потреба обчислити стабілізуючу матрицю, неможливість обчислення цієї матриці у нестаціонарній задачі. У статті запропоновано метод синтезу регулювання шляхом розв'язання крайової задачі на інтервалі циклу регулювання. Для цього диференційні рівняння для параметрів стану і множників Лагранжа виражають у вигляді різницевих лінійних співвідношень. Ураховуючи те, що параметри стану і множники Лагранжа у кінці циклу дорівнюють нулю, множники Лагранжа на початку циклу визначають за відомими значеннями параметрів стану на цей же момент шляхом розв'язання зазначеної лінійної системи. Одержані значення формують закон регулювання. Унаслідок малої тривалості циклу регулювання в закон регулювання вводять підсилювальний коефіцієнт. Його значення визначають за результатами попереднього моделювання. Працездатність запропонованого методу перевірено на прикладі прийнятої динамічної системи, у тому числі нестаціонарної. Підсилювальний коефіцієнт досить просто добирають за видом процесу стабілізації. Запропонований метод може бути використано в системах керування ракет різного призначення для регулювання параметрів руху.

Ключові слова: оптимальне керування, закон регулювання, множник Лагранжа, інтервал циклу регулювання, підсилювальний коефіцієнт.

The use of Langrangian multipliers at solution of optimal control problems in linear statement with quadratic quality criterion leads to the necessity of solving boundary value problem with conditions for multipliers at the right end of control interval. Solution of the obtained equations for the purpose of regulation synthesis in forward time in this case does not produce stabilizing effect, as a rule. For regulation synthesis, the method is widely used of analytical construction of optimal regulator based on stabilizing matrix, which is obtained by solution of algebraic Riccati equation. However, in this case, there are some difficulties ⍰ the necessity of calculating the stabilizing matrix, impossibility of calculating this matrix in non-stationary problem. The article proposes the regulation synthesis method by way of solving boundary value problem on regulation cycle interval. For this purpose, the differential equations for state parameters and Langrangian multipliers are expressed in the form of finite-difference linear relations. Taking into account that the state parameters and Langrangian multipliers are equal to zero at the end of cycle, the Langrangian multipliers at the beginning of *cycle are determined by known values of state parameters for the same moment through solving the above linear system. The obtained values form the regulation law. In consequence of small duration of regulation cycle, an amplifying coefficient is introduced in the regulation law. Its value is determined based on results of preliminary modeling. Efficiency of the proposed method was verified by the example of adopted dynamic system, including non-stationary. The amplifying coefficient is fairly simply selected by the type of stabilization process. The proposed method may be used in the control systems of rockets of various purpose for motion parameters regulation.*

Key words: optimal control, regulation law, Langrangian multiplier, regulation cycle interval, amplifying coefficient.

Постановка задачи

Рассмотрена задача оптимального управления в линейной постановке с квадратичным критерием качества [1]:

$$\dot{x}(t) = F \cdot x(t) + G \cdot u(t);\; x(0) = x_0; \qquad (1)$$

$$J = \int \left(x(t)^T A x(t) + u^T B u\right) dt = \min.$$

Использование множителей Лагранжа λ сводит решение поставленной задачи к решению краевой задачи:

$$\dot{x}(t) = F \cdot x(t) + G \cdot u(t);\; x(0) = x_0; \qquad (2)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A \cdot x(t) - F^T \cdot \lambda(t);\; \lambda(T) = 0; \qquad (3)$$

$$u(t) = -B^{-1} G^T \cdot \lambda(t). \qquad (4)$$

Одним из способов решения задачи является метод прогонки [1]. В этом случае, обозначая

$$\lambda(t) = S(t) \cdot x(t), \qquad (5)$$

из уравнений (2)−(4) получают для матрицы S(t) уравнение Риккати

$$\dot{S} + S \cdot F + F^T \cdot S - S \cdot G B^{-1} G^T \cdot S + A = 0; \quad (6)$$

$$S(T) = S_T.$$

То есть решение первой задачи по формулам (2)−(4) равноценно решению второй задачи по (2), (4)−(6).

Поскольку задача стационарная, то в установившемся режиме управления S(t)=0 и матрица S удовлетворяет алгебраическому уравнению Рикатти

$$S \cdot F + F^T \cdot S - S \cdot G B^{-1} G^T \cdot S + A = 0. \quad (7)$$

Как известно [2], это уравнение имеет два решения − стабилизирующее S_- и антистабилизирующее S_+. Для получения стабилизирующего решения существуют различные способы, из которых достаточно применяемым является способ интегрирования уравнения (6) в обратном времени:

$$\dot{S} = S \cdot F + F^T \cdot S - S \cdot G B^{-1} G^T \cdot S + A;\; S(0) = E.$$

В результате после вычисления матрицы S_- становится возможным использовать метод аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР) [3], назначая стабилизирующее регулирование в текущем времени в виде

$$u(t) = -B^{-1} G^T \cdot S_- \cdot x(t).$$

Поведение параметров состояния может быть проиллюстрировано путем решения уравнения (1) в текущем времени:

$$\dot{x}(t) = (F - G \cdot B^{-1} \cdot G^T \cdot S_-) \cdot x(t);\; x(0) = x_0.$$

Приведенный метод является вполне приемлемым для решения поставленной задачи регулирования. Однако можно отметить некоторые сложности: необходимость вычисления матрицы S_-, невозможность вычисления этой матрицы в нестационарной задаче.

В то же время решение уравнений (2)−(4) с целью синтеза регулирования в прямом времени, исходя из начального состояния, стабилизирующего эффекта, как правило, не дает. В целях достижения такого эффекта предлагается модифицировать рассмотренный метод.

Способ модификации задачи

Поскольку при синтезе закона регулирования приходится решать краевую задачу, а решать ее на длительном интервале не имеет смысла, предлагается решать краевую задачу на интервале цикла регулирования τ. Для этого запишем дискретное представление уравнений (2)-(4):

$$x_1 - x_0 = (F \cdot x_0 - R \cdot \lambda_0) \cdot \tau, \quad x_1 = 0;$$

$$\lambda_1 - \lambda_0 = (-A \cdot x_0 - F^T \cdot \lambda_0) \cdot \tau,\; \lambda_1 = 0,$$

где $R = G \cdot B^{-1} \cdot G$, индексы «0» и «1» отмечают текущий и следующий за ним моменты цикла.

Решая эти уравнения относительно λ_0, получаем

$$\lambda_0 = k \cdot (H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot P \cdot x_0, \qquad (8)$$

где $H = \begin{bmatrix} -\tau \cdot R \\ E - \tau \cdot F^T \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} -E - \tau \cdot F \\ \tau \cdot A \end{bmatrix}$;

k – усиливающий коэффициент.

Ввиду малости величины τ квадратичные члены по τ в матрицах выражения (8) можно отбросить. Тогда соответствующие выражения упрощаются:

$$H^T \cdot H = E - \tau \cdot (F - F^T);\; H^T \cdot P = \tau \cdot (R + A).$$

Необходимость в усиливающем коэффициенте k вызвана все той же малостью величины τ. При k=1 стабилизирующего эффекта не получается. Необходимое значение k достаточно просто подобрать по результатам предварительного моделирования поставленной задачи.

В результате после вычисления λ_0 стабилизирующее регулирование в текущий момент времени осуществляется по закону

$$u(t) = -B^{-1} G^T \cdot \lambda_0(t).$$

Поведение параметров состояния иллюстрируется также путем решения уравнений (2) в текущем времени с произвольным начальным состоянием системы.

Работоспособность предложенного метода, а также возможность его использования в нестационарном варианте проверены путем моделирования далее.

Пример конкретной задачи

В качестве примера была выбрана система, поведение которой описывается уравнением

$$\ddot{x}_1 = k_1 \cdot \dot{x}_1 + k_0 \cdot x_1 + u.$$

При принятых k_0 = -1 и k_1 = +1 поведение системы без параметра регулирования u заведомо не стабилизируемо. Введение еще одного параметра состояния $x_2 = x_1$ приводит к системе уравнений вида (1)

$$\dot{x}(t) = F \cdot x(t) + G \cdot u(t);$$

$$J = \int \left(x(t)^T A x(t) + u^T b u \right) dt = \min,$$

где $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_0 & k_1 \end{bmatrix}$; $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}$; $b = 0{,}5.$

Стабилизирующая матрица получается в результате решения уравнения Риккати (7)

$$S_- = \begin{bmatrix} 1{,}913533 & 0{,}366025 \\ 0{,}366025 & 1{,}316104 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Собственные значения матриц F и F - $R \cdot S_-$ равны, соответственно

0,5±i·0,866 и -0,8161±i·1,2512.

Закон регулирования принимался как на основе матрицы Риккати (9) по методу АКОР, так и без ее использования по предложенному методу.

В целях сравнения на приведенных ниже рисунках показано поведение выбранной системы при начальном возмущении $x_1(0)$=1, $x_2(0)$=0 и длительности цикла регулирования τ=0,01 с в различных ситуациях:

1) система без регулирования (рис. 1);

2) регулирование осуществляется на основе метода АКОР (рис. 2);

3) регулирование осуществляется на основе предложенного метода решения краевой задачи в цикле регулирования (рис. 3). Величина k=50 была принята исходя из условия приемлемости поведения параметров состояния. В данном случае можно было ориентироваться на график (рис. 2);

4) регулирование осуществляется аналогично п. 3, но для нестационарной системы (рис. 4):

$$k_0(t) = -1 + 0{,}3 \cdot \sin(6t/T), \quad k_1(t) = 1 + t/T.$$

Рис. 1. Поведение параметров системы без регулирования

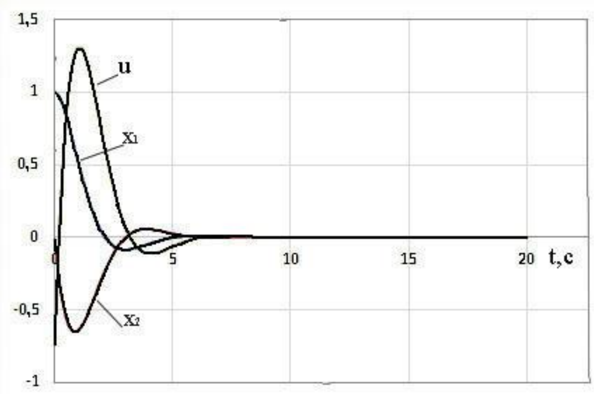

Рис. 2. Поведение параметров системы при регулировании методом АКОР

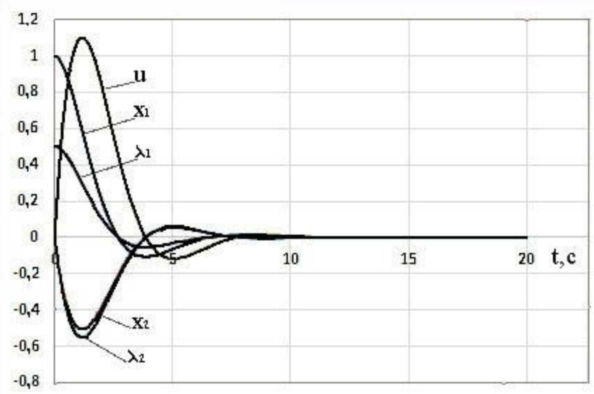

Рис. 3. Поведение параметров системы при регулировании предложенным методом решения краевой задачи в цикле регулирования

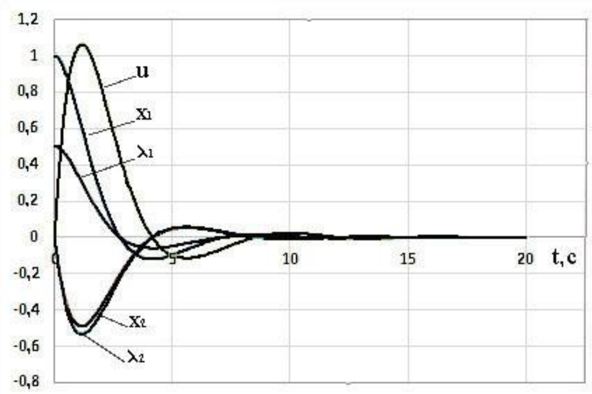

Рис. 4. Поведение параметров нестационарной системы при регулировании методом решения краевой задачи в цикле регулирования

Выводы

Предложенный метод регулирования линейной системы путем решения краевой задачи в цикле регулирования аналогичен методу АКОР с использованием стабилизирующей матрицы Риккати. Но он может применяться без вычисления этой матрицы, а также в случае, если система не стационарна.

Приведенные графики поведения параметров состояния системы, принятой для примера, подтверждают работоспособность этого метода.

Предложенный метод может быть использован в системах управления ракет различного назначения в части регулирования параметров движения. При этом необходимо провести дополнительные исследования его работоспособности в зависимости от длительности реализуемого цикла регулирования.

Список использованной литературы

1. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., 1972.

2. Ларин В. Б. О стабилизирующих и антистабилизирующих решениях алгебраических уравнений Риккати. *Проблемы управления и информатики*. 1996. №1-2.

3. Александров А. Г. Оптимальные и аддитивные системы. М., 1989.

Статья поступила 17.09.2019