https//doi.org/10.33136/stmaXXXX.XX.XXX
УДК 517.977.5:629.785
ISSN 2617-5525 (Print)
ISSN 2617-5533 (Online)
Creative Commons Attribution 4.0

Канд. техн. наук Л. Р. Козак

ТЕОРЕМА ПРО ПРИРОСТИ КООРДИНАТ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Традиційно високі вимоги до вагової та енергетичної досконалості космічних апаратів зумовлюють необхідність не тільки пошуку оптимальних конструктивних рішень, але й розроблення алгоритмів керування маневрами й орієнтацією апаратів, оптимальних за швидкодією та витратами енергії. Використання відомих методів визначення оптимального керування в багатьох практично важливих випадках наштовхується на непереборні труднощі, особливо з розширенням класу функцій, що описують керувальні та збурювальні сили. Подано доведення нової теореми механіки, застосування якої дозволяє досить просто розв'язати багато практично важливих задач оптимального керування. Суть теореми про прирости координат об'єктів керування зводиться до простої залежності між приростами координат, площами діючих сил і координатами центрів ваги цих площ на часовій осі. Оскільки обчислення площ і центрів ваги площ – задача в багатьох випадках елементарна, застосування теореми дає рішення для алгоритмів оптимального керування в аналітичній формі. Як приклади застосування теореми в статті наведено розв'язання задачі оптимальних за швидкодією та енергоспоживанням змін орієнтації апаратів, орієнтації за наявності збурювальних сил. Також аналітично вирішено задачі керування за обмеженої швидкості змінення керівної дії. Наведено розв'язок класичної задачі м'якої посадки апаратів на поверхню небесних тіл у вигляді точної та простої умови для визначення моменту увімкнення гальмових двигунів. Розглянуто питання оптимального керування програмним рухом реальних об'єктів, у яких масово-інерційні характеристики, тяга двигунів і швидкості змінення керувальних сил відрізняються від «ідеальних», узятих у розрахунках.

Ключові слова: теорема механіки, оптимальне керування, орієнтація апаратів, м'яка посадка.

Traditionally high requirements for the ideal weight and payload capabilities of spacecraft originate the need for optimal design solutions and, further, algorithms to enable the control of spacecraft maneuvering and attitude with the optimal speed and power consumption. Applying popular methods of optimal control determination encounters insurmountable complications in most practically critical situations, especially considering the persistently widening range of functions that describe controlling and disturbing forces. In this paper, the authors prove a new theorem in mechanics, which enables the solving of numerous practically critical problems related to optimal control. The core of the theorem about the increments of controlled objects' coordinates comes down to a simple relationship between coordinate increments, the areas of acting forces, and the coordinates of these areas' centers of gravity on the time axis. Calculating the mentioned areas and the coordinates of their centers of gravity is chiefly an elementary problem. Therefore, the presented theorem provides an analytical solution for the algorithms of optimal control. To exhibit an example of the theorem's practicality, the authors apply it in solving a problem concerning spacecraft attitude correction with the optimal speed and power consumption in the presence of disturbing forces. The paper also provides an analytical solution for a problem of control at a limited rate of controlling force variation. Additionally, the authors present a solution for a classical problem of spacecraft soft landing on celestial bodies. This solution is expressed in the form of a precise and simple condition for determining the ignition time for deceleration thrusters. The paper addresses the issues of optimal control for the programmed motion of actual objects, whose masses, moments of inertia, propulsion thrust, and speeds of variation of the controlling forces differ from the ideal ones used in the computations.

Keywords: theorem in mechanics, optimal control, spacecraft attitude, soft landing.

Вступ

Теорема про прирости координат об'єктів керування була доведена автором у 1974 році в ході робіт з вибору оптимальних алгоритмів керування програмними розворотами ступенів розведення бойових блоків міжконтинентальних балістичних ракет.

Результати застосування цієї теореми використано в алгоритмах керування ряду ракет, проте конфіденційність виконуваних робіт не сприяла у свій час широкій публікації в наукових виданнях як самої

теореми, так і розв'язків деяких класичних задач оптимального керування, які автор отримав з використанням зазначеної теореми.

У цій статті подано доведення теореми та деякі приклади її застосування.

Відмітною рисою керування літальними апаратами в космосі є практично повна відсутність зовнішніх сил, що діють на об'єкт керування, крім сил і моментів, створюваних керувальними й розгінними двигунами самого апарата.

До таких апаратів належать верхні ступені ракет, що відокремлюються поза атмосферою, розгінні ступені ракет-носіїв за групового виведення супутників, розгінні ступені багатоблочних бойових ракет (розділювані головні частини – РГЧ), супутники з керованою орієнтацією тощо.

Очевидно, вимоги до вагової досконалості елементів конструкції космічних апаратів більш жорсткі порівняно з вимогами до перших ступенів ракет. Наприклад, збільшення швидкостей і потужності приводів спричиняє скорочення часу керування, проте починаючи з певних значень швидкостей подальше їхнє зростання практично не впливає на час керування, а лише призводить до збільшення габаритів і маси джерел потужності й самих приводів.

Знайти оптимальне співвідношення потужності (швидкості) приводів і вагових витрат на їхню реалізацію – завдання досить складне, оскільки аналітичні методи оптимального керування в багатьох практично важливих випадках не працюють з розширенням класу функцій, що входять у праві частини рівнянь руху [1–4].

Нижче буде доведено теорему, яка зв'язує простими співвідношеннями сили, що діють на об'єкт, і прирости координат об'єкта в момент завершення керування. При цьому жодних обмежень на клас функцій, якими описано ці сили, не накладають. Покажемо це.

Динаміку плоского руху досить широкого й практично важливого класу керованих об'єктів, до яких належать у тому числі й космічні апарати, описано рівняннями другого порядку виду

$$\ddot{x} = A(x) + B(\dot{x}) + U(t) + F(t), \qquad (1)$$

де x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ – координата, швидкість і прискорення об'єкта; $A(x)$, $B(\dot{x})$ – прискорення, що залежать від фазових координат об'єкта (далі, для стислості, прискорення умовно називатимемо «силами»); $U(t)$, $F(t)$ – керівна та збурна дії – функції часу (для космічних апаратів можна взяти $A(x) = B(\dot{x}) = 0$).

Завданням керування в загальному випадку є оптимальне з певної точки зору переведення об'єкта з деякого початкового стану x_0, $\dot{x}_0$ у кінцевий стан x_k, $\dot{x}_k$, наприклад, за мінімальний час або з мінімальними витратами енергії протягом певного часу.

Як уже було відзначено, застосування різних розроблених методів синтезу оптимального керування наштовхується звичайно на значні, або навіть непереборні, труднощі з розширенням класу функцій, що входять у праву частину рівняння об'єкта (1).

Нижче доведено загальні необхідні й достатні умови, які повинна задовольняти права частина рівняння (1) для переведення об'єкта з початкового стану в будь-який кінцевий стан.

Використання на практиці цих умов, що мають простий геометричний зміст, дозволяє суттєво спростити розв'язання великої кількості практично важливих задач і одержати точний аналітичний розв'язок або розв'язок з гарним наближенням задач, які не вирішуються відомими методами.

Припустимо, що деяке керування $U(t)$ (разом з іншими силами, що діють на об'єкт) переводить об'єкт, рух якого описано рівнянням (1), з початкового стану x_0, $\dot{x}_0$ у кінцевий стан x_k, $\dot{x}_k$ за час T (рис.1, де $\ddot{x}$ – прискорення від суми всіх керувальних і збурювальних сил).

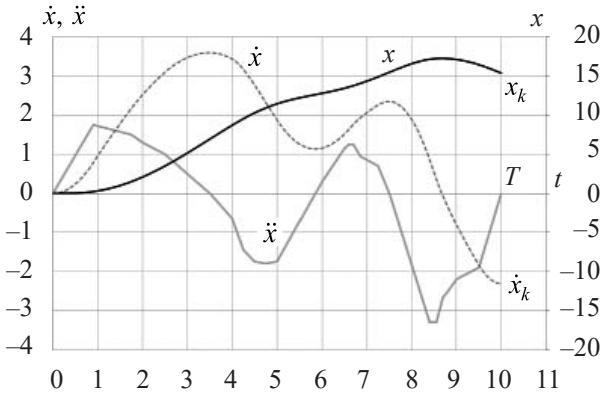


Рис. 1. Загальний випадок руху об'єкта

Не накладаючи жодних обмежень на можливий вид функцій, що входять у праву частину рівняння (1), уведемо *роздільні позначення для їхніх додатних і від'ємних значень*.

Наприклад,

$$A=\begin{cases}F_1(t) \text{ при } A(x)>0\\ F_2(t) \text{ при } A(x)<0\end{cases};$$

$$B(\dot{x})=\begin{cases}F_3(t) \text{ при } B(\dot{x})>0\\ F_4(t) \text{ при } B(\dot{x})<0\end{cases}$$

тощо.

Тоді рівняння руху об'єкта можна записати у вигляді

$$\ddot{x}=\sum_{i=1}^{n}F_i(t),$$

де $F_i(t)$ – знакосталі функції часу.

Кожна крива $F_i(t)$ в інтервалі керування обмежує деяку площу, яку називатимемо *площею або імпульсом діючої сили*: $S_i=\int_0^T F_i(t)\,dt.$

Кожна площа під кривою $F_i(t)$ має на осі часу свою координату центру ваги $t_{\text{Ц}.T_i}$.

Назвемо $\Delta x=x_k-x_0$ приростом положення об'єкта й $\Delta\dot{x}=\dot{x}_k-\dot{x}_0$ – приростом швидкості за час керування T.

Тоді теореми, що зв'язують прирости координат об'єкта із силами, що діють на об'єкт, можна сформулювати в такий спосіб.

Теорема 1. *Приріст швидкості об'єкта за час керування дорівнює алгебричній сумі площ усіх сил, що діють на нього:*

$$\Delta x=\sum_{i=1}^{n}S_i. \qquad (2)$$

Ця теорема – відома теорема механіки.

Теорема 2. *Приріст положення об'єкта за час керування дорівнює добутку кінцевої швидкості об'єкта на час керування мінус алгебрична сума добутків площ діючих сил на координати центрів ваги цих площ*:

$$\Delta x=\dot{x}_kT-\sum_{i=1}^{n}S_it_{\text{Ц}.T_i}. \qquad (3)$$

Для випадку нульової кінцевої швидкості ($\dot{x}_k=0$) *приріст положення об'єкта за час керування дорівнює алгебричній сумі добутків площ діючих сил на координати центрів ваги цих площ з оберненим знаком:*

$$\Delta x=-\sum_{i=1}^{n}S_it_{\text{Ц}.T_i}. \qquad (4)$$

Доведення

Зінтегруємо двічі на інтервалі керування рівняння руху об'єкта (1).

Перший інтеграл:

$$\dot{x}_k=\int_0^T\sum_{i=1}^{n}F_i\,dt+\dot{x}_0=\sum_{i=1}^{n}S_i+\dot{x}_0,$$

де $S_i=\int_0^T F_i\,dt$, звідки одержуємо рівність (2).

Другий інтеграл має вигляд:

$$x_k=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^t F_i\,dt^2+\dot{x}_0T+x_0.$$

Інтеграл під знаком суми обчислюємо частинами:

$$\int_0^T\int_0^t F_i\,dt^2=S_iT-\int_0^T tF_i\,dt=S_i\left(T-t_{\text{Ц}.T_i}\right),$$

де $t_{\text{Ц}.T_i}=\int_0^T\frac{tF_i\,dt^2}{S_i}$ – координата центра ваги фігури, обмеженої кривою $F_i(t)$.

У підсумку одержуємо:

$$x_k=\sum S_i\left(T-t_{\text{Ц}.T_i}\right)+\dot{x}_0T+x_0$$

або

$$\Delta x=\dot{x}_kT-\sum_{i=1}^{n}S_it_{\text{Ц}.T_i},$$

що й треба було довести.

Отже, у всіх випадках, незалежно від форми траєкторії об'єкта, за якою він переходить з однієї точки фазового простору в іншу, прирости фазових координат пов'язані з імпульсами сил, що діють на об'єкт, простими співвідношеннями (2)–(4). (Очевидно, таких траєкторій може бути нескінченна множина (наприклад, рис. 2)).

Оскільки обчислення площ, обмежених кривими різної конфігурації, і центрів ваги цих площ – задача в багатьох випадках елементарна, практичне застосування цих фактично геометричних співвідношень

(2)–(4) швидко приводить до розв'язання задач керування об'єктами в багатьох важливих для інженерної практики розрахункових випадках, і в тому числі за обмеженої швидкості змінення керівної дії.

Зокрема, якщо $\ddot{x} = U(t)$, вид кривої *керівної* дії $U(\tau)$ впливає на змінення швидкості й координати об'єкта в кінцевій точці керування лише остільки, оскільки він змінює площі й координати центрів ваги фігур, обмежених цією кривою.

На рис. 2 як приклад наведено три різні види керування, що переводять об'єкт у ту саму точку фазового простору за однаковий час.

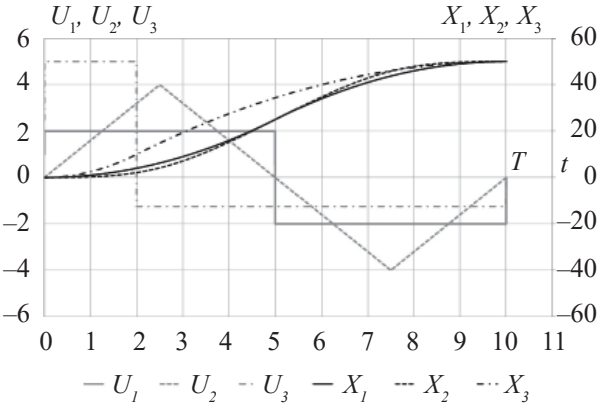


Рис. 2. Деякі можливі варіанти керування під час переміщення об'єкта в заданий стан

Варіанти керування

Розглянемо декілька прикладів застосування умов (2), (4) для визначення оптимального керування астатичними об'єктами другого порядку.

До астатичних об'єктів другого порядку можна зарахувати різні космічні апарати, а також досить великий клас об'єктів керування, у яких позиційні й дисипативні сили малі порівняно із силами керування, тобто

$$\ddot{x} = U(t) + F(t).$$

Нижче розглянемо деякі види оптимального керування.

1. Оптимальне за швидкодією керування

Припустимо, що керування $U(t)$ обмежене тільки за модулем і збурення $F(t) = 0$. Тоді оптимальним за швидкодією керуванням під час переведення об'єкта з одного встановленого положення x_0 в інше $x_к$ буде керування виду, поданого на рис. 3.

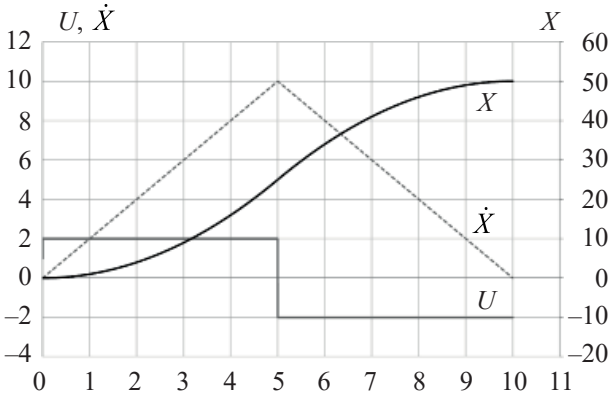


Рис. 3. Оптимальне за швидкодією керування

Дійсно, Δx – це інтеграл від функції швидкості, тобто величина площі трикутника або трапеції з обмеженою крутістю бічних сторін. З усіх можливих фігур однакової площі й з обмеженою крутістю бічних сторін (оскільки $|\ddot{x}| \le U_{\max}$) рівнобедрений трикутник має найменшу основу, тобто час керування T.

Використовуючи співвідношення (2), (4), запишемо:

$$S_1 = -S_2 = S = U_{\max}\frac{T^2}{2};$$

$$\Delta x = S\left(t_{\text{Ц}.T_2} - t_{\text{Ц}.T_1}\right) = S\frac{T}{2} = U_{\max}\frac{T^2}{4},$$

звідки визначаємо час оптимального керування

$$T = 2\sqrt{\frac{\Delta x}{U_{\max}}}. \qquad (7)$$

2. Оптимальне за енергоспоживанням керування

За заданого часу керування оптимальним за енергоспоживанням буде керування виду, поданого на рис. 4. Покажемо це, застосувавши умови (2), (4).

Енергоспоживання пропорційне інтегралу від модуля керувального зусилля

$$\int_0^T |U|\,dt = 2S = \frac{2\Delta x}{t_{\text{Ц}.T_2} - t_{\text{Ц}.T_1}}$$

і буде мінімальним за максимального значення різниці $\left(t_{\text{Ц}.T_2} - t_{\text{Ц}.T_1}\right)$, тобто за керування,

максимально рознесеного до країв інтервалу керування T.

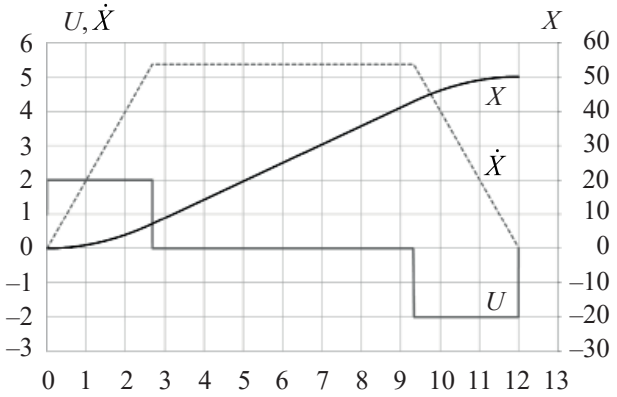


Рис. 4. Керування, оптимальне за енергоспоживанням

Моменти перемикання керування t_1 і t_2 визначають однозначно з використанням умови (2)

$$t_{1,2} = \frac{T}{2} \mp \sqrt{\frac{T^2}{4} - \frac{\Delta x}{U_{\max}}}.$$

Отримані залежності дозволяють, зокрема, оцінювати зменшення енергоспоживання зі збільшенням часу керування. Це особливо важливо за обмежених запасів енергоносіїв на космічних об'єктах. Так, наприклад, для випадку, поданого на рис. 4, збільшення часу керування *на 20 %* зменшує енергоспоживання майже у *два рази* порівняно з керуванням, максимальним за швидкодією (рис. 3).

3. Оптимальне керування за обмеженої швидкості змінення керівних сил

Більшість реальних систем керування мають значно обмежену швидкість змінення (наростання або спадання) керівної дії, тобто $\left|\dot{U}\right| \le \dot{U}_{\max}$.

Оптимальне за швидкодією керування за $\left|\dot{U}\right| \le \dot{U}_{\max}$, $\left|U\right| \le U_{\max}$ має вид, поданий на рис. 5.

Час оптимального керування визначають з умов (2), (4):

$$T = \tau + \sqrt{\tau^2 + \frac{4\Delta x}{U_{\max}}}, \qquad (5)$$

де $\tau = \dfrac{U_{\max}}{\dot{U}_{\max}}$ – час виходу керування з нульового рівня на максимальний.

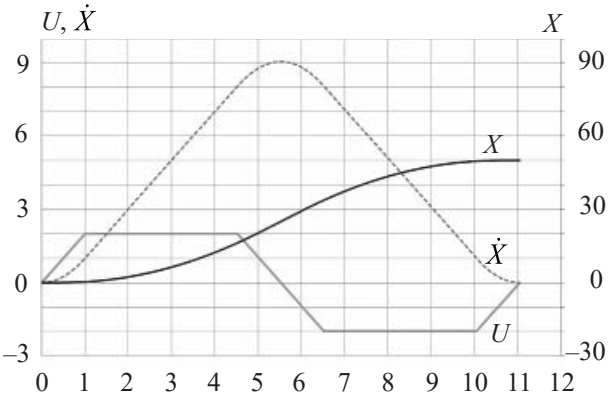


Рис. 5. Оптимальне керування за обмеженої швидкості змінення керувальних сил

Вираз (5) безпосередньо може бути використано, зокрема, для оцінювання впливу обмеженої швидкості змінення керувального зусилля на час керування й вибору на цій основі розумного співвідношення між швидкодією системи, необхідною для цього потужністю приводів і енергетичною досконалістю апарата.

4. Вплив збурної дії на керування

Для стислості розглянемо найпростіший випадок, коли на інтервалі керування збурення постійне, тобто $F(t) = \text{const}$ і $|U| \le U_{\max}$ (рис. 6).

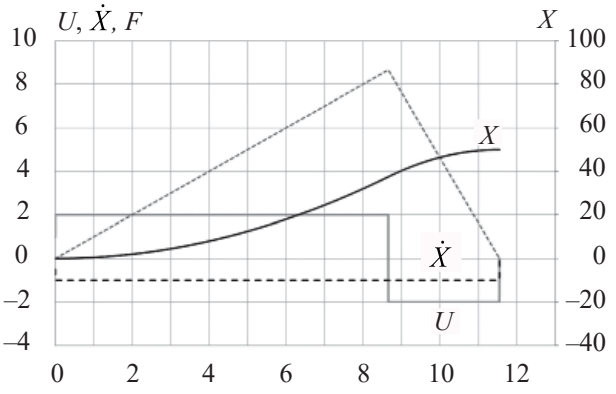


Рис. 6. Оптимальне керування за постійного збурення

Мінімальний час *керування*:

$$T = 2\sqrt{\frac{\Delta x U_{\max}}{U_{\max}^2 - F^2}} \qquad (6)$$

Час перемикання керування визначаємо з умови (2), і він дорівнює:

$$t_0 = \frac{T\left(U_{\max} + F\right)}{2U_{\max}}.$$

Вираз (6) показує, що наявність у системі постійних або повільно мінливих збурень *будь-якого знаку* в загальному випадку *збільшує* час керування.

Аналогічно можна показати, що енергоспоживання за заданого часу керування та за наявності збурних дій також зростає.

5. Задача м'якої посадки космічних апаратів

Класична задача м'якої посадки літального апарата на поверхню Землі, Місяця або будь-якого іншого небесного тіла полягає у визначенні моменту увімкнення гальмових двигунів, за якого співвідношення висоти, швидкості зниження і тяги двигунів забезпечують нульову швидкість апарата під час підходу до поверхні планети.

Досить простий розв'язок цієї задачі у вигляді кінцевих формул для визначення моменту початку гальмування та часу гальмування можна одержати з використанням доведеної вище теореми.

Природно, передбачається, що літальний апарат оснащено висотоміром і датчиком лінійної швидкості, а прискорення під час роботи двигунів більше ніж прискорення вільного падіння.

Позначимо:

X, $\dot{X}$ – висота й швидкість апарата;

t_0 – час початку гальмування;

T – тривалість ділянки гальмування;

g – прискорення вільного падіння;

$a_д$ – прискорення від роботи гальмового двигуна;

$a = a_д - g$ – прискорення гальмування.

Тоді умови (2), (4) запишемо у вигляді:

$$aT - gt_0 = -\dot{X}_0;$$

$$\frac{gt_0^2}{2} - aT\left(t_0 + \frac{T}{2}\right) = -X_0,$$

звідки

$$t_0 = \frac{\dot{X}_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{\dot{X}_0}{g}\right)^2 + \frac{2aX_0 - \dot{X}_0^2}{g\left(g+a\right)}}; \qquad (7)$$

$$T = \frac{gt_0 - \dot{X}_0}{a}.$$

З рівняння (7) для визначення часу початку гальмування випливає, що t_0 обнулюється за рівності квадрата поточної швидкості й подвоєного добутку висоти на прискорення гальмування, тобто

$$\dot{X}^2 = 2aX. \qquad (8)$$

Отже, якщо є безперервна інформація про висоту й швидкість зниження апарата, можна використовувати найпростіший алгоритм увімкнення двигунів гальмування (без розрахунку часу t_0):

Команда на увімкнення гальмових двигунів видається в момент виконання рівності квадрата поточної швидкості та подвоєного добутку поточного значення висоти на прискорення гальмування (8).

На рис. 7 для прикладу наведено отримані в результаті інтегрування рівнянь руху процеси м'якої посадки літального апарата на поверхню Місяця для двох варіантів комбінацій висоти та швидкості апарата на момент початку розрахунків:

1. $X_0 = 100$ м, $\dot{X}_0 = -5$ м/с, $a = 10$ м/с^2, $g = 1{,}62$ м/с^2;

2. $X_0 = 300$ м, $\dot{X}_0 = -10$ м/с, $a = 10$ м/с^2, $g = 1{,}62$ м/с^2.

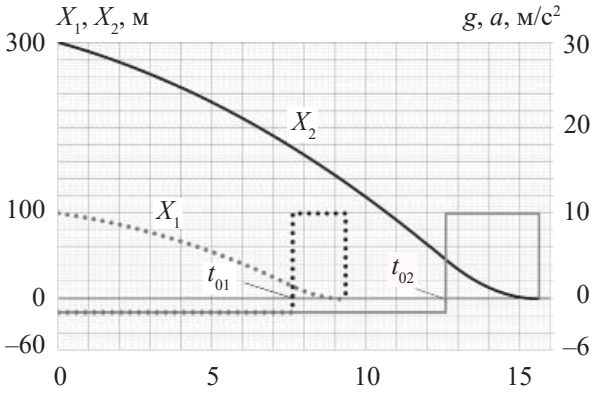


Рис. 7. Процеси м'якої посадки літального апарата на Місяць

6. Керування реальними об'єктами

Будь-який математичний опис руху об'єкта є приблизним. Це стосується і характеристик об'єкта, і сил, які на нього діють. Тому «жорстке», без зворотного зв'язку, програмне керування реальними об'єктами,

розраховане за найточнішими формулами, *ніколи не збігається* з розрахунковим рухом.

Відмінності реальних характеристик об'єкта й зовнішніх сил від узятих у розрахунках компенсує система керування, яка відповідно до закладеного алгоритму формує додаткові до програмних керувальні зусилля ΔU, пропорційні відхиленням реального руху об'єкта від розрахункового програмного руху. Програмне керування реальними об'єктами можна подати у вигляді:

$$U(t) = U_{\text{пр}}(t) + \Delta U;$$

$$\Delta U = k_1\left(x - x_{\text{пр}}\right) + k_2\left(\dot{x} - \dot{x}_{\text{пр}}\right),$$

де $$x_{\text{пр}} = x_0 + \int_0^t \dot{x}_{\text{пр}} dt;$$

$$\dot{x}_{\text{пр}} = \dot{x}_0 + \int_0^t U_{\text{пр}}(t)\, dt.$$

Очевидно, чим точніше визначено програмні функції $U_{\text{пр}}(t)$, $\dot{x}_{\text{пр}}$, $x_{\text{пр}}$, тим ближче керування реальним об'єктом до розрахункового оптимального керування.

Використання теореми про прирости координат для визначення оптимального керування та оптимальних програмних параметрів руху об'єкта дозволяє одержувати якісні процеси навіть за відносно великих відхилень реальних характеристик об'єкта й сил, що діють на нього, від «ідеальних», узятих для розрахунків.

Список використаної літератури

1. Kozak L. Dinamika servomekhanizmov raketnoj techniki. Inzhynernyje metody issledovanija. Germanija LAP LAMBERT Academic Publiching, 2022. 144 s.

2. Voronov A. A. Osnovy teorii avtomaticheskogo upravlenija. 1970. Ch. III: Optymalnyje, mnogosviaznyje i adaptivnyje sistemy. 328 s.

3. Feldbaum A. A., Butkovskij A. G. Metody teorii avtomaticheskogo upravlenija. 1971. 744 s.

4. Feldbaum A. A. Osnovy teorii optimalnych avtomaticheskich sistem. 1963. 552 s.

Стаття надійшла 19.01.2026

Дата прийняття статті до друку
після рецензування 22.07.2026

Дата публікації 02.11.2026