https//doi.org/10.33136/stmaXXXX.XX.XXX
УДК 629.7.062.2+629.783:553
ISSN 2617-5525 (Print)
ISSN 2617-5533 (Online)
Creative Commons Attribution 4.0

Д-р техн. наук В. С. Хорошилов, https://orcid.org/0009-0008-5726-6607,
О. О. Коляда, https://orcid.org/0009-0009-0498-4311

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ДВОКОНТУРНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ОРІЄНТАЦІЄЮ КОСМІЧНОГО АПАРАТА «СІЧ»

Розвиток вітчизняних космічних апаратів (КА) серії «Січ» для завдань дистанційного зондування Землі (ДЗЗ) потребує радикального підвищення точності стабілізації оптико-електронної апаратури. Сучасні вимоги до просторової розрізненості знімків висувають жорсткі обмеження щодо кутових коливань платформи. Традиційні одноконтурні маховичні системи не здатні одночасно забезпечити високу динаміку під час швидких програмних розворотів і мінімальну похибку безпосередньо під час знімання через компроміс між максимальним моментом і чутливістю двигунів. Використання двоконтурної схеми маховиків, яка інтегрує основний і прецизійний контури, критично важливе для мінімізації кутових похибок за обмежених енерговитрат бортових систем. Розроблено комплексну математичну модель системи керування кутовим рухом КА «Січ». Особливістю моделі є математичний опис взаємодії двох рівнів виконавчих органів: основного контуру великих силових маховиків для відпрацювання швидких динамічних маневрів і прецизійного контуру малих маховиків для високоточної компенсації мікрозбурень і фінальної стабілізації. Об'єктом дослідження є перехідні процеси керування кутовим рухом КА в різних експлуатаційних режимах: первинного заспокоєння після відокремлення, тривалої трьохосьової орієнтації, швидких програмних поворотів і орієнтації на наземні пункти під час скидання інформації. Запропоновано нові алгоритми оптимального розподілу керуючих моментів між двома контурами виконавчих органів на основі частотного розділення сигналів. Додатково синтезовано закон керування для безперервного розвантаження кінетичного моменту системи маховиків за допомогою електромагнітів, що взаємодіють із геомагнітним полем, запобігаючи насиченню двигунів.

Результати моделювання повністю підтверджують ефективність запропонованої дворівневої схеми виконавчих органів. Вона дозволяє знизити амплітуду низькочастотних кутових коливань КА під час знімання. Спільне використання контурів забезпечує жорсткі вимоги до прецизійної орієнтації за істотного скорочення часу заспокоєння та мінімальних витрат електроенергії, що продовжує термін активного існування супутника.

Ключові слова: космічний апарат, система керування, двигун-маховик, прецизійна стабілізація, математичне моделювання, електромагніти, точність, похибка.

The development of the domestic Sich satellite family for Earth observation missions requires a radical increase in the stabilization accuracy of optoelectronic payload. Contemporary requirements for spatial resolution impose strict limitations on the angular oscillations of the satellite platform. Due to a trade-off between maximum torque and engine sensitivity, traditional stabilization systems consisting of a single loop of reaction wheels cannot simultaneously provide high dynamics during rapid programmed maneuvers and minimal tracking errors during imaging. Implementing a two-loop reaction wheel configuration, which integrates a primary loop and a precision loop, is critical as it minimizes angular errors under the strict power constraints of onboard systems.

This paper discusses a comprehensive mathematical model developed for the attitude control system of the Sich satellite. The model's key feature is the mathematical description of the interaction between two levels of actuators: a primary loop of large reaction wheels for quick dynamic maneuvers, and a precision loop of small wheels for high-accuracy microdisturbance compensation and final stabilization. The object of the study includes transient attitude control processes across various operational modes: initial detumbling after separation, long-term maintenance of the desired three-axis attitude, rapid programmed rotations, and pointing to the ground station during data downlink.

The paper offers new algorithms that are based on the separation of control signals' frequency to achieve the optimal allocation of control torques between the two loops of actuators. Additionally, the paper synthesizes a control law for the continuous momentum desaturation of the reaction wheel system using magnetorquers that interact with the geomagnetic field, preventing actuator saturation.

Mathematical simulation results fully confirm the effectiveness of the proposed two-level configuration of the actuators. It reduces the amplitude of low-frequency angular oscillations of the satellite during imaging. The joint operation of both loops meets the stringent requirements for precise orientation while significantly

reducing the detumbling period and minimizing power consumption, thereby extending the satellite's operational lifespan.

Keywords: satellite; control system; reaction wheel; precise stabilization; mathematical simulation; magnetorquers; accuracy, pointing error.

Вступ

Актуальність статті зумовлена необхідністю підвищення ефективності вітчизняних КА дистанційного зондування Землі серії «Січ» шляхом мінімізації похибок їхньої кутової орієнтації та стабілізації. Сучасні завдання моніторингу, картографії та оборонного сектору вимагають від оптико-електронних та радіолокаційних бортових систем надвисокої роздільної здатності. Це безпосередньо залежить від точності позиціонування КА в просторі. Використання двох незалежних контурів двигунів-маховиків є одним із найбільш перспективних рішень для досягнення балансу між динамічними характеристиками й енергоефективністю супутника. Проте аналіз точності таких систем залишається складним науково-технічним завданням. Дослідження базується на методах теоретичної механіки (рівнянні Ейлера) і теорії автоматичного керування. Для реалізації математичної моделі використано принципи об'єктно-орієнтованого моделювання, що дозволяє налаштовувати параметри двох контурів двигунів-маховиків. Моделювання виконано з урахуванням моделі густини атмосфери й параметрів геомагнетизму. Для кількісної оцінки ефективності побудованої системи застосовано методи статистичного аналізу динамічних похибок орієнтації та визначення залишкових кутових швидкостей.

Поставлення завдання дослідження

Математичне формулювання завдання полягає у визначенні вектора стану КА, що описує кутовий рух навколо центра мас і задовольняє систему диференціальних рівнянь у різних режимах функціонування [1]:

1. Синтез алгоритмів початкової орієнтації (режим заспокоєння та побудови в орбітальній системі координат). Визначення закону керування магнітними моментами трьох електромагнітів для демпфування початкової кутової швидкості після відокремлення від ракети-носія та подальшої побудови трьохосьової орієнтації в орбітальній системі координат за допомогою чотирьох двигунів-маховиків.

2. Формалізація дворівневого керування (режим програмних поворотів і режим скидання інформації). Розроблення логіки перемикання між контурами виконавчих органів:

– етап маневрування: формування керуючого моменту основним контуром чотирьох двигунів-маховиків для поворотів на задані кути;

– етап прецизійної стабілізації: передача керування контуру чотирьох двигунів-маховиків для забезпечення стабільності базової системи координат відносно орбітальної системи координат із заданою точністю під час знімання чи скидання відеоінформації.

3. Математичне забезпечення розвантаження (режим трьохосьової орієнтації КА в орбітальній системі координат і режим заспокоєння та побудови в орбітальній системі координат). Розроблення алгоритму розвантаження кінетичних моментів за допомогою електромагнітів без переривання режиму орієнтації, враховуючи взаємодію з магнітним полем Землі.

Модель має враховувати граничні значення керуючих моментів, швидкості змінення кінетичного моменту й енергетичні можливості КА «Січ», що визначається специфікою корисного навантаження.

Кінцевою метою моделювання є верифікація працездатності запропонованої двоконтурної схеми та підтвердження того, що похибка стабілізації в прецизійному режимі не перевищує встановлених допусків для оптичних приладів апарата.

Для розроблення математичної моделі системи керування КА «Січ» необхідно врахувати багаторівневу структуру керування, що базується на таких режимах [2]:

Режим заспокоєння та побудови в орбітальній системі координат:

Відрізок 1. Погашення початкової кутової швидкості після відокремлення від ракети-носія за допомогою трьох електромаг-

нітів, установлених уздовж осей зв'язаної системи координат.

Відрізок 2. Побудова трьохосьової орієнтації в орбітальній системі координат із використанням чотирьох двигунів-маховиків.

Режим трьохосьової орієнтації забезпечує підтримання заданої точності в орбітальній системі координат у перервах між сеансами знімання. Математична модель у цьому режимі має описувати взаємодію основних і прецизійних двигунів-маховиків, оскільки останні використовують для розвантаження накопиченого кінетичного моменту маховиків.

Режими програмних поворотів і скидання інформації використовують комбіновану роботу двох контурів:

1. *Маневр* – виконують чотири двигуни-маховики для забезпечення необхідного керуючого моменту під час поворотів на великі кути.

2. *Стабілізація* – після завершення повороту для забезпечення прецизійної точності (під час знімання або наведення антени) керування передається на чотири двигуни-маховики.

Особливість: у цих режимах розвантаження маховиків не виконується, воно переноситься на фазу.

Режим функціональних перевірок – діагностика приладів без активного керування орієнтацією, що є важливим етапом для верифікації стану бортових систем.

Матеріали та методи дослідження

Дослідження базується на методах теоретичної механіки (рівняння Ейлера) [3] та теорії автоматичного керування. Для реалізації математичної моделі використано принципи об'єктно-орієнтованого моделювання, що дозволяє налаштовувати параметри двох контурів двигунів-маховиків [4]. Моделювання виконано з урахуванням моделі густини атмосфери [5] та параметрів геомагнетизму [6].

Мета дослідження

Метою роботи є розроблення та наукове обґрунтування комплексної математичної моделі системи керування орієнтацією (СКО) КА «Січ», яка за рахунок впровадження двох незалежних контурів двигунів-маховиків (основного та прецизійного) забезпечує оптимальне поєднання динамічних характеристик під час виконання маневрів і високої точності стабілізації.

Для досягнення поставленої мети вирішено такі завдання:

1. Сформовано структуру математичної моделі, що описує взаємодію корпусу КА з двома типами виконавчих органів і магнітними приводами.

2. Розроблено алгоритми логічного перемикання між контуром «грубих» маховиків для режиму програмних поворотів і режиму скидання інформації та прецизійним контуром для забезпечення необхідної якості стабілізації в умовах зовнішніх збурень.

3. Формалізовано процеси розвантаження кінетичного моменту обох контурів маховиків за допомогою електромагнітів у базовому режимі.

4. Верифіковано запропоновану модель методами комп'ютерного моделювання для підтвердження її відповідності технічним вимогам місій КА серії «Січ».

Виклад основного матеріалу

Математична модель системи керування КА «Січ» базується на описі кутового руху твердого тіла навколо центра мас. Використання двох контурів двигунів-маховиків потребує врахування сумарного кінетичного моменту виконавчих органів у рівняннях динаміки.

Системи координат

Для описання математичної моделі системи керування використовують такі праві ортогональні системи координат:

$O_E X_i Y_i Z_i$ – інерційна система з початком у центрі Землі; вісь OEY_i направлена по осі обертання Землі, вісь OEZ_i направлена в точку весняного рівнодення;

$O_E X_s Y_s Z_s$ – сонячно-екліптична система; вісь OEZ_s направлена по лінії Земля – Сонце, а вісь OEX_s паралельна дотичній до екліптики та направлена в бік руху Сонця по екліптиці;

$O_E X_e Y_e Z_e$ – система, пов'язана з диполем магнітного поля Землі; вісь OEY_e направлена по осі диполя, а вісь OEZ_e – по лінії

перетину площини магнітного та земного екваторів;

$O_dX_dY_dZ_d$ – конструкторська система координат, початок O_d розміщено в площині з'єднання КА з ракетою-носієм, і він збігається із серединою відрізку, який з'єднує центри класного отвору й класного паза на площині з'єднання; вісь O_dX_d лежить на зазначеному відрізку і направлена в бік класного отвору (у бік півплощини стабілізації I); вісь O_dY_d перпендикулярна площині з'єднання КА з ракетою-носієм і направлена в бік ракетиносія;

$OX_oY_oZ_o$ – орбітальна система з початком у центрі мас КА; вісь OZ_o направлена по радіусу-вектору, який з'єднує центр Землі із центром мас КА, а вісь OX_o – у напрямку польоту;

$OX_gY_gZ_g$ – географічна система; вісь OZ_g направлена вздовж радіуса-вектора, який з'єднує центр мас КА із центром Землі, вісь OX_g паралельна дотичній до меридіана та направлена в бік географічної півночі Землі;

$OX_bY_bZ_b$ – зв'язана система з початком в центрі мас КА; напрям осей зв'язаної системи координат збігається з напрямком осей конструкторської системи координат.

Послідовності поворотів під час переходів між різними системами координат показано на рис. 1–4.

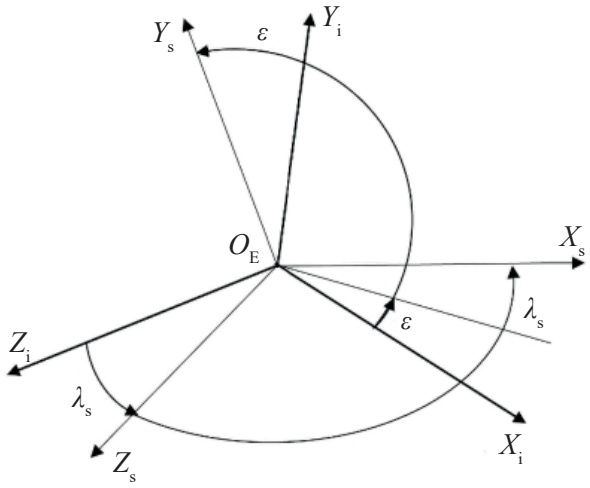


Рис. 1. Перехід від інерційної системи координат до сонячно-еліптичної системи

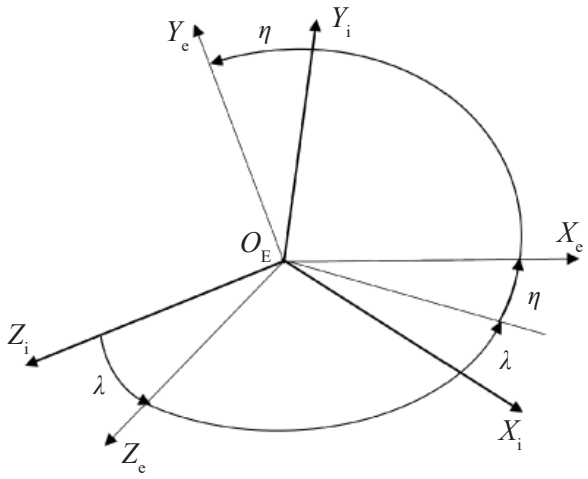


Рис. 2. Перехід від інерційної системи координат до системи, зв'язаної з диполем магнітного поля Землі

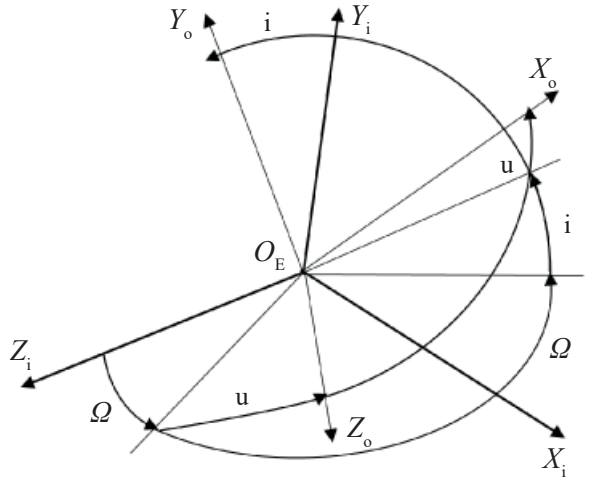


Рис. 3. Перехід від інерційної системи координат до орбітальної системи координат

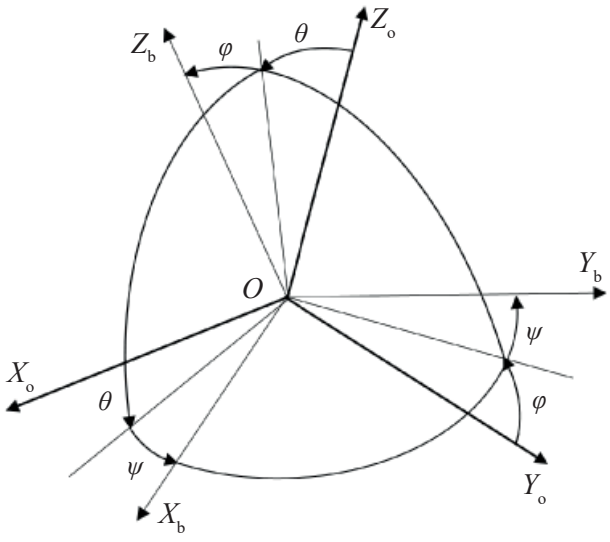


Рис. 4. Перехід від орбітальної системи координат до зв'язаної системи координат

Параметри орбітального руху КА

Орбітальні параметри визначають за такими виразами:

$$\nu = M + \left(2\cdot e - \frac{e^3}{4}\right)\cdot \sin M + $$

$$+\frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M;$$

$$M = \omega_0\left(t - t_0\right); \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{u}{a^3}}; \quad \dot{\nu} = \frac{\sqrt{\mu\cdot\rho}}{r^2};$$

$$r = \frac{p}{1+e\cdot\cos\nu}; \quad p = a\left(1-e^2\right);$$

$$e = \frac{h_a - h_p}{h_a + h_p + 2R}; \quad a = \frac{h_a + h_p + 2R}{2};$$

$$\Omega\left(t\right) = \Omega\left(t_0\right) + \dot{\Omega}\left(t - t_0\right);$$

$$u\left(t\right) = \omega_p\left(t\right) + \nu\left(t\right);$$

$$\omega_p\left(t\right) = \omega_p\left(t_0\right) + \dot{\omega}_p\left(t - t_0\right),$$

де ν – істинна аномалія; M – середня аномалія; e – ексцентриситет; ω_0 – середня орбітальна кутова швидкість; t, t_0 – поточний і початковий час відповідно; u – аргумент широти; a – велика піввісь; $\mu = 0{,}3986\cdot10^{15}$ м^3/с^2 – гравітаційна стала Землі; r – відстань від центру Землі до центра мас КА; p – фокальний параметр орбіти; h_a, h_p – висота апогею і перигею відповідно; R = 6 371 км – середній радіус Землі; Ω – довгота висхідного вузла; ω_p – аргумент перигея; $\dot{\Omega}, \dot{\omega}_p, \dot{\nu}$ – похідні довготи висхідного вузла, аргументу перигею та істинної аномалії відповідно.

Для орбіт з ексцентриситетом $e < 0{,}1$ похідні аргументу перигею та довготи висхідного вузла визначають за формулами:

$$\dot{\omega}_p = 5\left(\frac{Re}{a}\right)^{7/2}\cdot\left(5\cos^2 i - 1\right);$$

$$\dot{\Omega}_p = -10\left(\frac{Re}{a}\right)^{t/2}\cdot\cos i,$$

де Re = 6 378 км – радіус Землі на екваторі; i – нахил площини орбіти до площини екватора.

Згідно з рис. 3 перехід від інерційної системи координат до орбітальної системи координат визначається послідовністю поворотів на кути Ω і u. Власний кватерніон $s = s_0 + s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3$ переходу інерційної системи координат до орбітальної системи координат дорівнює [2]

$$S = S_1\cdot S_2\cdot S_3 = \left(\cos\frac{\Omega}{2} + e_2\cdot\sin\frac{\Omega}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{i}{2} + e_3\cdot\sin\frac{i}{2}\right)\times\left(\cos\frac{u}{2} + e_2\cdot\sin\frac{u}{2}\right),$$

де S_1, S_2, S_3 – власні кватерніони поворотів на кути Ω, i, u; e_1, e_2, e_3 – орти осей інерційної системи координат.

Звідси можемо виразити компоненти кватерніона S через кути Ω, i, u

$$s_0 = \cos\frac{i}{2}\cdot\cos\frac{\Omega+u}{2}; \quad s_1 = \sin\frac{i}{2}\cdot\sin\frac{\Omega-u}{2};$$

$$s_2 = \cos\frac{i}{2}\cdot\sin\frac{\Omega+u}{2}; \quad s_3 = \sin\frac{i}{2}\cdot\sin\frac{\Omega-u}{2}.$$

Елементи матриці $\overline{\overline{T}}_{0i}$ переходу від інерційної системи координат до орбітальної системи координат можна виразити через компоненти кватерніона S таким чином [3]:

$$\overline{\overline{T}}_{0i} = \begin{vmatrix} s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 & 2\cdot\left(s_1\cdot s_2 - s_0\cdot s_3\right) & 2\cdot\left(s_1\cdot s_3 - s_0\cdot s_2\right) \\ 2\cdot\left(s_1\cdot s_2 - s_0\cdot s_3\right) & s_0^2 + s_2^2 - s_1^2 - s_3^2 & 2\cdot\left(s_2\cdot s_3 + s_0\cdot s_1\right) \\ 2\cdot\left(s_1\cdot s_3 + s_0\cdot s_1\right) & 2\cdot\left(s_2\cdot s_3 - s_0\cdot s_1\right) & s_0^2 + s_3^2 - s_1^2 - s_2^2 \end{vmatrix}.$$

Вектор $\overline{\omega}_{0i}^o$ кутової швидкості орбітальної системи координат відносно інерційної системи координат у проєкціях на осі орбітальної системи координат визначено виразом $\overline{\omega}_{0i}^o = \dot{\overline{u}}^o + \overline{\overline{T}}_{0i}\cdot\dot{\overline{\Omega}}^i$, де $\dot{\overline{u}}^o = \overline{\omega}_p^o + \dot{\overline{\nu}}^o$ – вектор похідної аргументу широти; $\overline{\omega}_p^o$, $\dot{\overline{\nu}}^o$, $\dot{\overline{\Omega}}^i$ – відповідно вектори похідних аргументу перигею, істинної аномалії та довготи висхідного вузла, що визначають таким чином:

$$\overline{\omega}_p^o = \left|0, \quad \dot{\omega}_p, \quad 0\right|^T; \qquad \dot{\overline{\nu}}^o = \left|0, \quad \dot{\nu}^o, \quad 0\right|^T;$$

$$\dot{\overline{\Omega}}^i = \left|0, \quad \dot{\Omega}, \quad 0\right|^T.$$

Динамічне рівняння

Динамічне рівняння руху КА отримано у векторно-матричному вигляді на основі закону зміни кінетичного моменту

$$\dot{\bar{\omega}}^b_{bI} = \left(\bar{\bar{J}}^b\right)^{-1} \cdot \left(\bar{\bar{M}}^b_{\Sigma} - \bar{\omega}^b_{bi} \times \bar{\bar{J}}^b \cdot \bar{\omega}^b_{bi} - \bar{\omega}^b_{bi} \times \bar{\bar{H}}^b - \bar{\omega}^b_{bi} \times \bar{\bar{H}}^b_{\Pi}\right),$$

де $\bar{\bar{J}}^b$– тензор інерції КА; M^b_{Σ} – сумарний вектор моментів, що діють на КА; $\dot{\bar{\omega}}^b_{bI}$, ω^b_{bi} – вектори абсолютної кутової швидкості та прискорення КА; $\bar{\bar{H}}^b$, $\bar{\bar{H}}^b_{\Pi}$ – вектори кінетичних моментів основних і прецизійних двигунів-маховиків.

Кінематика руху КА навколо центра мас

Положення осей зв'язаної системи координат відносно орбітальної системи координат, яка є опорною, визначається трьома кутами φ – крену, θ – тангажа, ψ – рискання. У разі ідеальної орієнтації КА осі зв'язаної системи координат збігаються з однойменними осями орбітальної системи координат.

Згідно з рис. 4 перехід від орбітальної системи координат до зв'язаної системи координат визначається послідовністю поворотів на кути θ, φ, ψ. Власний кватерніон,

$$Q = q_0 + q_1 \cdot i_1 + q_2 \cdot i_2 + q_3 \cdot i_3,$$

переходу від орбітальної системи координат до зв'язаної системи координат дорівнює [2]:

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 = \left(\cos\frac{\theta}{2} + i_2 \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right) \times$$

$$\times \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i_1 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right) \times \left(\cos\frac{\psi}{2} + i_3 \cdot \sin\frac{\psi}{2}\right),$$

де Q_1, Q_2, Q_3 – власні кватерніони поворотів на кути θ, φ, ψ; i_1, i_2, i_3 – орти осей орбітальної системи координат.

Звідси можна виразити компоненти кватерніона Q через кути θ, φ, ψ:

$$q_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2};$$

$$q_1 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2};$$

$$q_2 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2};$$

$$q_3 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2}.$$

Елементи матриці $\bar{\bar{T}}_{b0}$ переходу від орбітальної системи координат до зв'язаної системи координат можна виразити через компоненти кватерніона Q таким чином [3]:

$$\bar{\bar{T}}_{b0} = \begin{vmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2\cdot(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & 2\cdot(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) \\ 2\cdot(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2\cdot(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) \\ 2\cdot(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) & 2\cdot(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{vmatrix}.$$

Під час переходу від орбітальної системи координат до зв'язаної системи координат компоненти власного кватерніона Q не змінюються, тому можна записати

$$Q = q_0 + q_1 \cdot k_1 + q_2 \cdot k_2 + q_3 \cdot k_3, \quad (1)$$

де k_1, k_2, k_3 – орти осей зв'язаної системи координат.

Кінематичне рівняння руху КА навколо центра мас напишемо в кватерніонній формі [2]

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \bar{\omega}^b_{b0},$$

де $\dot{Q} = \dot{q}_0 + \dot{q}_1 \cdot k_1 + \dot{q}_2 \cdot k_2 + \dot{q}_3 \cdot k_3$ – похідна кватерніона Q; $\bar{\omega}^b_{b0} = \left|\omega_{X_b} \quad \omega_{Y_b} \quad \omega_{Z_b}\right|^T$ – вектор кутової швидкості КА відносно орбітальної системи координат у проєкціях на осі зв'язаної системи координат, який розуміємо як кватерніон

$$\bar{\omega}^b_{b0} = \omega_{X_b} \cdot k_1 + \omega_{Y_b} \cdot k_2 + \omega_{Z_b} \cdot k_3. \quad (2)$$

Вектор $\bar{\omega}^b_{b0}$ визначається виразом

$$\bar{\omega}^b_{b0} = \bar{\omega}^b_{bi} - \bar{\bar{T}}_{b0} \cdot \bar{\omega}^o_{0i}.$$

Тут вектор $\bar{\omega}^o_{0i}$ знаходимо за формулою (2).

Рівняння (1) можна також записати у вигляді системи рівнянь для похідних від компонент кватерніона:

$$\dot{q}_0 = -0,5\left(q_1 \cdot \omega_{X_b} + q_2 \cdot \omega_{Y_b} + q_3 \cdot \omega_{Z_b}\right);$$

$$\dot{q}_1 = -0,5\left(q_0 \cdot \omega_{X_b} + q_2 \cdot \omega_{Z_b} - q_3 \cdot \omega_{Y_b}\right);$$

$$\dot{q}_2 = -0,5\left(q_0 \cdot \omega_{Y_b} - q_1 \cdot \omega_{Y_b} + q_3 \cdot \omega_{X_b}\right);$$

$$\dot{q}_3 = -0,5\left(q_0 \cdot \omega_{Z_b} + q_1 \cdot \omega_{Y_b} - q_2 \cdot \omega_{X_b}\right).$$

Моменти, що діють на КА

Сумарний вектор моментів $\bar{M}_{\Sigma}^{b}$ у динамічному рівнянні є векторною сумою моментів, що діють на КА.

$$\bar{M}_{\Sigma}^{b} = \bar{M}_{g}^{b} + \bar{M}_{m}^{b} + \bar{M}_{a}^{b} + \bar{M}_{s}^{b} + \bar{M}_{C}^{b} + \bar{M}_{R}^{b},$$

де $\bar{M}_{g}^{b}$ – гравітаційний момент; $\bar{M}_{m}^{b}$ – магнітний момент; $\bar{M}_{a}^{b}$ – аеродинамічний момент; $\bar{M}_{s}^{b}$ –момент сил сонячної радіації; $\bar{M}_{C}^{b}$ – керуючий момент; $\bar{M}_{R}^{b}$ – момент розвантаження двигунів-маховиків.

Гравітаційний момент $\bar{M}_{g}^{b}$ можна розрахувати за формулою

$$\bar{M}_{g}^{b} = \frac{3\mu}{r^3} \cdot e_r^b \times \bar{\bar{J}}^b \cdot e_r^b,$$

де e_r^b – одиничний вектор, який направлений по радіусу-вектору, що з'єднує центр Землі із центром мас КА, у проєкціях на осі зв'язаної системи координат.

Вектор e_r^b збігається з ортом i_3 осі OZ_o, проєкції якого на осі зв'язаної системи координат формують третій стовпчик матриці $\bar{\bar{T}}_{b0}$.

Формули для розрахунку збурених моментів, що діють на КА (магнітного, аеродинамічного й моменту сил сонячної радіації), наведено в роботі [4].

Аналіз джерел похибок

Для забезпечення прецизійної точності кутової орієнтації КА «Січ» в умовах функціонування двох контурів двигунів-маховиків необхідно детально проаналізувати дестабілізаційні фактори. Сумарний вектор похибки СКО формується під впливом комплексу взаємопов'язаних джерел, які доцільно класифікувати на чотири основні групи.

1. Зовнішні збурювальні моменти

Зовнішнє космічне середовище створює безперервний спектр низькочастотних гармонічних і постійних завад, що діють на корпус КА та навантажують виконавчі органи [7]:

– Аеродинамічний момент – зумовлений взаємодією залишків атмосфери з поверхнями КА (зокрема, панелями сонячних батарей). Він має циклічний характер, залежить від густини атмосфери на робочій орбіті [6] та викликає низькочастотний дрейф осей орієнтації.

– Гравітаційний момент – виникає внаслідок градієнта сил тяжіння Землі через несиметричність тензора інерції КА. Цей момент є детермінованим і викликає вимушені коливання супутника з частотою, що кратна частоті його орбітального руху.

– Магнітний збурювальний момент – генерується внаслідок взаємодії власного (паразитного) дипольного магнітного моменту КА з вектором індукції геомагнітного поля.

2. Внутрішні апаратні завади виконавчих органів

Використання двох контурів двигунів-маховиків (основного та прецизійного) вносить специфічні внутрішні збурення, зумовлені конструктивними обмеженнями приводів:

– Високочастотні мікроімпульсні завади виникають через статичний і динамічний дисбаланс роторів двигунів-маховиків. Якщо основний контур маховиків генерує низькочастотні коливання великої амплітуди, то прецизійний контур працює у вищому частотному діапазоні. Джитер маховиків безпосередньо призводить до високочастотного «розмазування» зображення оптико-електронної апаратури ДЗЗ.

– Ефекти «сухого» тертя та зони нечутливості обмежують точність відпрацювання малих керуючих моментів, особливо під час зміни напрямку обертання маховиків (реверсу).

– Перехідні процеси та електромагнітні наведення, які можуть спотворювати корисний момент прецизійних маховиків, виникають під час активації системи магнітного розвантаження [8] унаслідок взаємодії з електромагнітами.

3. Інструментальні похибки вимірювальних пристроїв

Точність контуру керування фундаментально обмежена похибками вимірювального тракту СКО [9]:

– Шуми датчиків – кутові швидкості, що вимірюють волоконно-оптичні або лазерні гіроскопи, містять постійну складову зміщення нуля та випадкове блукання, що інтегрується в похибку визначення кута.

– Похибка та дискретність зоряних датчиків – датчики забезпечують високоточну прив'язку, проте мають власну просторову похибку вимірювання кватерніона абсолютної орієнтації, а також затримку оновлення даних у бортовому комп'ютері.

4. Алгоритмічні й обчислювальні фактори

Похибки, викликані цифровою реалізацією законів керування в бортовій обчислювальній машині:

– Транспортне запізнення: час, що витрачається на опитування сенсорів, фільтрацію (наприклад, у фільтрі Калмана) та розрахунок кватерніона неузгодження.

– Похибки алгоритму логічного перемикання: несвоєчасна передача команд між «грубим» основним і прецизійним контурами призводить до виникнення перерегулювання та збільшення часу заспокоєння КА під час динамічних маневрів.

Урахування всієї сукупності наведених факторів у розробленій математичній моделі дозволяє синтезувати таку логіку дворівневого керування, яка мінімізує вплив зазначених завад на кінцеву точність стабілізації супутника.

Моделі магнітного поля Землі

Для розрахунків магнітного моменту, що діє на КА, використовують вектор $\overline{B}$ індукції магнітного поля Землі. У наведеній математичній моделі системи керування для визначення вектора $\overline{B}$ можна використовувати дипольну модель магнітного поля Землі або Гауссову з урахуванням восьми гармонік [6]. Вектор індукції $\overline{B}$ для Гауссової моделі визначають за формулами, наведеними в роботі [6].

Модель верхньої атмосфери

Густину атмосфери, яку використовуємо для визначення проєкцій вектора аеродинамічного моменту на осі зв'язаної системи координат, розраховуємо відповідно до [5]. Зміну внесено лише до формули розрахунку $\cos\varphi_m$, де φ_m – центральний кут між точкою простору, для якої розраховують густину, і точкою з максимальним значенням густини в її добовому розподіленні.

Керування орієнтацією КА

Наведені нижче закони керування та складені на їхній основі алгоритми керування сформовано з урахуванням даних, отриманих під час розроблення КА «Січ» [1, 4].

Керування орієнтацією КА на відрізку гасіння початкової кутової швидкості, керування в режимі орієнтації в орбітальній системі координат і керування розвантаженням двигунів-маховиків у режимі орієнтації в орбітальній системі координат описано в роботі [4].

Керування орієнтацією КА в режимі заспокоєння і побудови орбітальної системи координат

Режим заспокоєння і побудови орбітальної системи координат охоплює два відрізки:

– відрізок гасіння початкової кутової швидкості, яку отримав КА під час відокремлення від ракети-носія;

– відрізок побудови трьохосьової орієнтації і стабілізації КА в орбітальній системі координат.

Як виконавчі органи системи керування на відрізку гасіння початкової кутової швидкості КА використовують три електромагніти, встановлені вздовж осей зв'язаної системи координат.

Під час побудови трьохосьової орієнтації КА і стабілізації його в орбітальній системі координат як виконавчі органи системи керування використовують чотири двигуни-маховики.

Керування орієнтацією КА на відрізку побудови трьохосьової орієнтації стабілізації КА в орбітальній системі координат

Для приведення КА в орієнтоване в орбітальній системі координат положення і стабілізації КА в орбітальній системі координат як виконавчі органи системи керування використовують чотири двигуни-маховики. Алгоритм формування керувальних сигналів у каналах керування під час роботи системи керування на відрізку побудови трьохосьової орієнтації стабілізації КА в орбітальній системі координат складається з двох частин:

– алгоритму розрахунку програмної траєкторії повороту КА;

– алгоритму розрахунку програмного керування для відстеження траєкторії повороту КА.

Керування орієнтацією КА в режимі програмних поворотів і в режимі скидання інформації

Як виконавчі органи системи керування в режимі програмних поворотів і в режим скидання інформації під час виконання програмних поворотів КА відносно орбітальної системи координат на задані кути використовуються чотири основні двигуни-маховики, а для стабілізації КА в повернутих положеннях із заданою точністю під час зняття або під час скидання відеоінформації на Землю використовуються чотири прецизійних двигуни-маховики [10]. Розвантаження двигунів-маховиків у режимі програмних поворотів і в режимі скидання інформації не виконується.

Алгоритм формування керуючих сигналів у каналах керування під час роботи системи керування в режимі програмних поворотів і в режимі скидання інформації складається з двох частин:

– алгоритму розрахунку програмної траєкторії повороту КА;

– алгоритму розрахунку керування для відстеження програмної траєкторії повороту КА.

Взаємозв'язок динамічних і кінематичних рівнянь рухомого КА

Математична модель обертального руху КА є замкненою системою, у якій динамічні та кінематичні рівняння жорстко пов'язані між собою. Фізико-математичний перехід від динаміки до кінематики здійснюється за допомогою вектора відносної кутової швидкості КА відносно орбітальної системи координат

$$\overline{\omega}_{b0}^{b} = \left| \omega_{X_b} \quad \omega_{Y_b} \quad \omega_{Z_b} \right|^{T}.$$

Процес взаємодії між двома блоками рівнянь реалізується за наведеною нижче схемою.

Спочатку на основі теореми про зміну кінетичного моменту (рівняння Ейлера) визначається вектор абсолютної кутової швидкості КА $\overline{\omega}_{bi}^{b}$ та її похідна $\dot{\omega}_{bi}^{b}$. Цей вектор формується під дією сумарного моменту зовнішніх сил $\overline{M}_{\Sigma}^{b}$ та керуючих моментів, що створюють основні й прецизійні двигуни-маховики $\overline{H}^{b}$, $\overline{H}_{\text{П}}^{b}$.

Отриманий з динамічних рівнянь вектор абсолютної кутової швидкості $\dot{\overline{\omega}}_{bi}^{b}$ трансформується у вектор відносної кутової швидкості $\overline{\omega}_{b0}^{b}$. Для цього враховується переносний рух орбітальної системи координат відносно інерційної $\overline{\omega}_{0i}^{o}$, який проєктується на зв'язану систему координат за допомогою матриці напрямних косинусів $\overline{\overline{T}}_{b0}$.

Далі компоненти обчисленого вектора відносної кутової швидкості ω_{X_b}, ω_{Y_b}, ω_{Z_b} безпосередньо підставляють у кватерніонне кінематичне рівняння руху $\dot{Q} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \overline{\omega}_{b0}^{b}$ або у його скалярну форму для покомпонентного інтегрування параметрів Родріга – Гамільтона q_0, q_1, q_z, q_3.

Інтегрування кінематичних рівнянь дозволяє безперервно оновлювати компоненти кватерніона $\dot{Q}$, які, своєю чергою, визначають поточну матрицю напрямних косинусів $\overline{T}_{b0}$. Оскільки матрицю $\overline{T}_{b0}$ використовують для розрахунку гравітаційного моменту $\overline{M}_{g}^{b}$ (через третій стовпець матриці переходу) та інших зовнішніх збурень у динамічному блоці, система замикається.

Така структура взаємозв'язку є базовою для всіх трьох етапів керування.

Аналіз результатів і обговорення

Проведене комп'ютерне моделювання дозволило оцінити динаміку системи керування КА «Січ» у ключових режимах функціонування. Аналіз отриманих перехідних процесів дозволяє зробити такі висновки.

Використання електромагнітів забезпечує ефективне демпфування початкової кутової швидкості за 1,5–2 оберти навколо Землі. Перехід до побудови трьохосьової орієнтації за допомогою основного контуру двигунів-маховиків відбувається без значних перерегулювань, що підтверджує стійкість алгоритму.

Найбільший науковий інтерес викликає аналіз переходу від маневрування основного контуру двигунів-маховиків до прецизійної стабілізації. Установлено, що передача керування під час кутового неузгодження

дозволяє уникнути динамічних ударів у системі. Застосування контуру двигунів-маховиків прецизійної стабілізації дозволило знизити амплітуду кутових коливань у режимі знімання до рівня кутових секунд, що відповідає вимогам до оптичних приладів високої роздільної здатності.

Моделювання підтвердило можливість утримання кінетичного моменту обох контурів у межах 20–30 % від зони насичення за рахунок періодичного вмикання електромагнітів. При цьому вплив розвантажувального моменту на точність орієнтації компенсується контуром прецизійних двигунів-маховиків, що запобігає відхиленню базової системи координат від орбітальної системи координат.

Наукова новизна

Наукова новизна отриманих результатів полягає в такому:

– Вперше розроблено комплексну математичну модель СКО КА «Січ», яка базується на детермінованій взаємодії двох різнотипних контурів виконавчих органів (основного та прецизійного двигунів-маховиків). Це дозволило формалізувати процес переходу від енергоємного маневрування до високоточної стабілізації як єдиний динамічний процес.

– Запропоновано новий підхід до реалізації режиму програмних поворотів і скидання інформації (режим скидання інформації), що полягає у дворівневій стратегії розподілу керуючих моментів. На відміну від класичних одноконтурних систем, розроблена модель дозволяє мінімізувати перехідні коливання під час передачі керування від основного контуру двигунів-маховиків до прецизійного контуру.

– Удосконалено алгоритми розвантаження кінетичного моменту для гібридних систем «маховики – електромагніти». Математично обґрунтовано можливість одночасного розвантаження двох контурів двигунів-маховиків у режимі орієнтації в орбітальній системі координат без порушення цільової орієнтації базової системи координат відносно орбітальної системи координат, ураховуючи актуальні моделі геомагнітного поля.

Висновки

У статті подано результати розроблення та дослідження комплексної математичної моделі СКО КА «Січ», що базується на використанні двох контурів двигунів-маховиків та електромагнітів. За результатами роботи зроблено такі висновки:

– Розроблено цілісну математичну модель, яка вперше формалізує динамічну взаємодію основного контуру двигунів-маховиків та прецизійного контуру як єдиної дворівневої системи. Це дозволяє адекватно описувати перехідні процеси під час зміненя режимів від енергоємного маневрування до високоточної стабілізації.

– Обґрунтовано алгоритмічне забезпечення режимів функціонування системи керування (режиму заспокоєння і побудови орбітальної системи координат, режиму орієнтації в орбітальній системі координат, режиму програмних поворотів, режиму скидання інформації). Доведено, що стратегія перемикання керуючих моментів між контурами забезпечує зниження амплітуди кутових коливань у прецизійному режимі до рівня кутових секунд, що критично важливо для якості оптичного знімання.

– Підтверджено ефективність розвантаження кінетичного моменту за допомогою електромагнітів у режимі орієнтації в орбітальній системі координат.

– Зазначено, що використання прецизійного контуру двигунів-маховиків для тривалої підтримки орієнтації дозволяє знизити загальне енергоспоживання системи порівняно з класичними одноконтурними схемами великої потужності.

Практична цінність роботи полягає в можливості впровадження розробленої моделі в програмно-технічні комплекси ДП «КБ «Південне» для відпрацювання алгоритмів орієнтації перспективних супутників серії «Січ» та їхньої верифікації на етапі наземних випробувань.

Список використаної літератури

1. Космічна система «Січ-2»: завдання та напрями використання / ред.-упоряд.: К. Волох, М. Мітрахов, С. Янчевський ; пер. з англ. В. Демчук. Київ : ДКАУ, 2011. 48 с.

2. Branets V. M., Shmyigalevskiy I. P. Primenenie kvaternionov v zadachah orientatsii tverdogo tela. 1973. 320 s.

3. Lure A. I. Analiticheskaya mehanika. 1961. 824 s.

4. Хорошилов В. С., Зикова Н. П. Керування рухом космічного апарата : математична модель. Дніпро : ДП «КБ «Південне», 2023. 42 с.

5. GOST R 25645.166-2004. Atmosfera Zemli verhnyaya. Model plotnosti dlya ballisticheskogo obespecheniya poletov iskusstvennyih sputnikov Zemli. Deystvitelen s 2005-01-01. 2004. 28 s.

6. Benkova N. P., Tyurmina L. O. Analiticheskoe predstavlenie geomagnitnogo polya na territorii Sovetskogo Soyuza dlya epohi 1958 g. *Geomagnetizm i aeronomiya*. 1961. T. 1, № 1. S. 87–103.

7. Єпішев В. П., Кудак В. І., Мотрунич І. І., Періг В. М., Найбауер І. Ф., Гуранич П. П., Сусла А. І., Кошкін М. І. Аналіз фотометрії супутника «Січ-2» на багаторічному інтервалі спостережень. *Космічна наука і технологія*. 2023. Т. 29, № 2. С. 86–96. https://doi.org/10.15407/knit2023.02.086

8. Khoroshylov S. V., Wang C. Spacecraft Relative on-off Control via Reinforcement Learning. *Space Science and Technology*. 2024. Т. 30, № 2. P. 3–14. https://doi.org/10.15407/knit2024.02.003

9. Офіційний коментар щодо деяких особливостей створення та запуску космічного апарата «Січ-2-1» («Січ-2-30»). *Аерокосмічний портал України*. 2022. URL: https://space.com.ua/2022/02/04/ofitsijnij-komentar-shhodo-deyakih-osoblivostej-stvorennya-ta-zapusku-kosmichnogo-aparata-sich-2-1-sich-2-30/

10. *Людина і Космос* : XXVI Міжнародна молодіжна науково-практична конференція. Збірник тез. (Дніпро, 17–19 квітня 2024 р.). Дніпро, 2024. 340 с.

Стаття надійшла 31.07.2026

Дата прийняття статті до друку
після рецензування 21.09.2026

Дата публікації 02.11.2026